

SÉRIE A. N° 1042

N° D'ORDRE :

1880

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

le grade de Docteur ès-sciences physiques

PAR

André GUILBERT

Ingénieur diplômé de l'Ecole Supérieure d'Electricité.

Chef de Travaux principal d'essais de machines à l'Ecole Supérieure d'Electricité

1^{re} THÈSE

Étude théorique et expérimentale du Circuit magnétique déformable

2^{me} THÈSE

Propositions données par la Faculté

soutenues le 18 Janvier 1926, devant la Commission d'Examen

MM. G. KOENIGS, *Président*

Paul JANET,

A. GUILLET,

A. LIÉNARD,

} *Examineurs*

PARIS

ETIENNE CHIRON, ÉDITEUR

40, Rue de Seine, 40

1926

SÉRIE A. N° 1042

N° D'ORDRE :

1880

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

le grade de Docteur ès-sciences physiques

PAR

ANDRÉ GUILBERT

Ingénieur diplômé de l'École Supérieure d'Électricité

Chef de Travaux principal d'essais de machines à l'École Supérieure d'Électricité

1^{re} THÈSE

Étude théorique et expérimentale du Circuit magnétique déformable

2^e THÈSE

Propositions données par la Faculté

soutenues le *Janvier 1926, devant la Commission d'Examen*

MM. G. KOENIGS, *Président.*

Paul JANET, {
A. GUILLET, } *Examineurs.*

A. LIÉNARD.

PARIS

Etienne CHIRON, Éditeur

40, Rue de Seine, 40

—
1926

FACULTÉ des SCIENCES de L'UNIVERSITÉ de PARIS

MM.

Doyen M. MOLLIARD, *Professeur. Physiologie végétale.*

Doyen honoraire ... P. APPELL.

Professeurs honoraires.. { P. PUISEUX.
V. BOUSSINESQ.
A. JOANNIS.
H. LE CHATELIER.
H. LEBESQUE.
A. FERNBACH.

Professeurs ÉMILE PICARD Analyse supérieure et algèbre supérieure.
G. KOENIGS Mécanique physique et expérimentale.
E. GOURSAT Calcul différentiel et calcul intégral.
P. JANET Electrotechnique générale.
F. WALLERANT Minéralogie.
H. ANDOYER Astronomie.
P. PAINLEVÉ Mécanique analytique et mécanique céleste.
E. HAUG Géologie.
Gabriel BERTRAND .. Chimie biologique.
M^{me} P. CURIE..... Physique générale et radioactivité.
M. CAULLERY Zoologie (Évolution des êtres organisés).
C. CHABRIÉ Chimie appliquée.
G. URBAIN Chimie minérale.
Émile BOREL Calcul des probabilités et Phys. mathém.
L. MARCHIS Aviation.
Jean PERRIN Chimie physique.
H. ABRAHAM Physique.
E. CARTAN Géométrie supérieure.
L. LAPICQUE Physiologie générale.
E. VESSIOT Théorie des groupes et calcul des variations.
A. COTTON Physique générale.
J. DRACH Application de l'analyse à la géométrie.
Charles FABRY Physique.
Charles PÉREZ Zoologie.
A. LEDUC Physique théorique et physique céleste.
Léon BERTRAND ... Géologie appliquée et géologie régionale.
R. LESPIEAU Théories chimiques.
E. RABAUD Biologie expérimentale.
P. PORTIER Physiologie comparée.
É. BLAISE Chimie organique.
P.-A. DANGEARD ... Botanique.
C. MAURAIN Physique du globe.
P. MONTEL Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT ... Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ Biologie maritime.
M. TIFFENEAU Chimie (Enseignement P.C.N.)
G. JULIA Mathématiques générales.
A. JOB. Chimie générale.
N. Géographie physique.

E. HÉROUARD Zoologie.
Rémy PERRIER Zoologie (Enseignement P.C.N.)
G. SAGNAC Physique théorique et physique céleste.
E. PÉCHARD Chimie (Enseignement P.C.N.).
V. AUGER Chimie analytique.
M. GUICHARD Chimie minérale.
A. GUILLET Physique.
G. MAUGUIN Minéralogie.
L. BLARINGHEM ... Botanique.
A. MICHEL-LÉVY ... Péetrographie.
A. DEREIMS Géologie.
R. DONGIER Physique du globe.

Secrétaire Daniel TOMBECK.

A MA GRAND'MERE

A MES PARENTS

A MA FEMME

A Monsieur PAUL JANET,
Membre de l'Institut,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris,
Directeur du Laboratoire Central d'Électricité
et de l'Ecole Supérieure d'Electricité.

INTRODUCTION

On désigne sous le nom d'électro-aimant des appareils où l'aimantation du fer ou de l'acier par le courant électrique est utilisée à produire soit un champ magnétique intense dans une région déterminée de l'espace, soit, lorsqu'ils comportent des éléments mobiles, un travail mécanique par déformation du système établi. On distingue donc parmi les électro-aimants deux catégories d'appareils, de conception et d'utilisation nettement différentes ; nous avons consacré le travail suivant à l'étude de la seconde catégorie.

L'invention de l'électro-aimant, destiné à produire un travail mécanique, précédée en 1820 de la découverte de l'aimantation du fer par le courant électrique d'Arago et de celle du solénoïde d'Ampère, est due à William Sturgeon qui présenta, le 23 mai 1825, à la Society of Arts, le premier appareil en fer à cheval attirant une armature. Sturgeon construisit par la suite des appareils de plus en plus gros et de plus en plus puissants. Des recherches furent faites peu de temps après par Henry, par Wheatstone et par Joule, avant d'arriver aux tentatives de détermination des lois quantitatives exposées au chapitre III.

L'électro-aimant est la première solution du moteur électrique permettant de transformer l'énergie électrique fournie initialement par des piles en énergie mécanique. C'est la solution la plus avantageuse encore à adopter à l'heure actuelle chaque fois que l'on a à développer un travail relativement restreint pendant un temps très court et avec un faible déplacement. Comme cas limite ce déplacement peut être nul et l'on réalise ainsi l'électro-aimant de levage dont l'emploi devient universel.

L'étude des lois quantitatives et des formules relatives à l'attraction des électro-aimants est très ancienne et a été faite un très grand nombre de fois. Bien que l'on soit arrivé, ces dernières années seulement, à des résultats tout à fait satisfaisants, la question est loin d'être complètement connue. Il est encore actuellement impossible de faire le calcul exact d'un électro-aimant, comme on le fait pour les autres machines électriques, et les constructeurs sont obligés de se servir presque uniquement de données empiriques.

On peut donc se poser la question suivante : est-on en possession des formules exactes, ou bien leur application rigoureuse est-elle impossible,

étant donnée la complexité du problème ou l'absence d'éléments encore inconnus ?

De plus, sur ce sujet, fait unique dans le domaine de l'électricité, il n'existe aucune vue d'ensemble, récente tout au moins (1), des travaux qui ont été faits ; il semble même que, fort souvent, les auteurs se soient ignorés les uns les autres.

Nous avons donc entrepris de faire dans une première partie, en même temps qu'un exposé critique, une étude théorique complète de cette question en introduisant l'hystérésis et les fuites. Nous nous sommes servi pour cela exclusivement de la théorie du circuit magnétique qui, comme nous aurons l'occasion de le dire, est inattaquable au point de vue scientifique, si l'on s'entend sur les définitions des quantités qu'elle fait intervenir.

Nous avons en second lieu vérifié expérimentalement l'exactitude des formules de l'attraction et des conclusions théoriques que nous avons déduites de la première partie. Nous avons consacré enfin un chapitre spécial à l'étude de l'attraction dans le cas particulier de l'aimant, ce qui nous a conduit à faire certaines hypothèses sur la nature de l'hystérésis.

Nous nous sommes étendu longuement sur la réalisation des expériences mais nous avons eu soin d'éviter de parler de détails de construction d'appareils afin de garder à notre étude son caractère purement scientifique. Nous espérons que nos méthodes graphiques et nos conclusions seront utiles au progrès et à la construction des électro-aimants.

(1) Nous citerons cependant le livre de Silvanus P. Thompson : *L'électro-aimant et l'électromécanique* qui, quoique très ancien, contient des détails intéressants.

ÉTUDE THÉORIQUE ET EXPERIMENTALE DU CIRCUIT MAGNÉTIQUE DÉFORMABLE

CHAPITRE PREMIER

RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS SUR LE CIRCUIT MAGNÉTIQUE.

Nous rappellerons d'abord quelques notions relatives à la théorie du circuit magnétique. Nous y joindrons les définitions de termes nouveaux et quelques études qui nous seront utiles dans le développement de ce travail.

1. — *Notion du circuit magnétique.* — La notion du circuit magnétique est liée aux noms de Rowland, Lord Elphinstone, Bosanquet, Forbes, Kapp et les frères J. et E. Hopkinson. L'idée d'appliquer la loi d'Ohm aux phénomènes magnétiques est due à Rowland (1). Cette idée fut reprise par Bosanquet (2) qui la généralisa et introduisit les dénominations de force magnétomotrice et de résistance magnétique. L'étude des fuites est due à Hopkinson.

Considérons un tore en fer (*fig. 1*), supposé sans hystérésis, sur lequel



Fig. 1.

sont enroulées *régulièrement* un certain nombre n de spires parcourues par un courant I . Si nous supposons, en outre, que la largeur du tore est suffisamment petite devant son diamètre, le champ pourra être considéré comme constant en tous points d'une section du fer et aura pour valeur :

$$\mathcal{H} = \frac{4\pi n I}{l},$$

(1) *Philosophical Magazine*, série IV, vol. X, août 1873.

(2) *Philosophical Magazine*, juillet 1884, page 552 et *Electrician*, février 1885.

l étant la longueur de la ligne de force moyenne. De plus, si l'enroulement est serré sur le tore, il n'y a pas de champ en dehors du fer.

Le flux passant à travers une section du tore de surface S normale aux lignes de forces est :

$$\Phi = \mathcal{B}S = \frac{4\pi nI}{l} \mu S,$$

$\mu = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{H}}$ étant le coefficient de perméabilité, rapport de l'induction au champ.

Cette expression peut s'écrire :

$$\Phi = \frac{4\pi nI}{l} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{l}{\mu S}},$$

en posant :

$$\mathcal{E} = 4\pi nI,$$

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S},$$

quantités auxquelles on a donné respectivement les noms de *force magnétomotrice* et de *réductance*. Le nombre de spires et le courant n'intervenant que par leur produit, celui-ci peut être réalisé d'une façon quelconque.

Cette dernière expression du flux présente une analogie complète avec celle qui donne le courant dans un circuit fermé, la force magnétomotrice correspondant à la force électromotrice, et la réductance à la résistance. Le problème est cependant plus délicat que pour les circuits électriques, du fait que μ , pour les matériaux magnétiques, est fonction du champ. Comme on possède la courbe de l'induction en fonction du champ, il sera souvent plus commode de traiter les problèmes relatifs aux circuits magnétiques au moyen de constructions graphiques exécutées sur cette courbe.

Nous allons donner un tableau de correspondance entre les grandeurs relatives aux circuits, magnétique et électrique, auquel nous avons adjoint la liste des unités du système C. G. S. électromagnétique utilisées (1).

Courant	I	Flux d'induction	Φ	Maxwell
Densité de courant	$\frac{I}{S} = \delta$	Induction	$\frac{\Phi}{S} = \mathcal{B}$	Gauss
Force électromotrice	E	Force magnétomotrice	$\mathcal{E} = 4\pi nI$	Gilbert = 1,25 Ampère-tour
Différence de potentiel	V ou U	Différence de potentiel magnétique	$\mathcal{V}$	»
Champ électrostatique	$-\frac{dV}{dl} = H$	Champ magnétique	$-\frac{d\mathcal{V}}{dl} = \mathcal{H}$	Gauss
Résistance	$\rho \frac{l}{S} = R$	Réductance	$\frac{l}{\mu S} = \mathcal{R}$	Gilbert par Maxwell

(1) P. JANET, *Leçons d'Electrotechnique générale*. 5^e édition, tome I, page 85.

Conductance	$\frac{1}{R} = C$	Perméance	$\frac{1}{\mathcal{R}} = \mathcal{P}$	Maxwell par Gilbert = <i>cm</i>
Conductivité	$\frac{1}{\rho}$	Perméabilité	μ	
Résistivité	ρ	Réductivité	$\frac{1}{\mu}$	

Nous pouvons considérer un tronçon de circuit magnétique comme l'on considère une partie d'un circuit électrique comprise entre deux points. Par analogie, il est facile de voir que les lois de Kirchhoff s'appliquent aux tronçons de circuits magnétiques. Si l'on affecte un sens positif à chacun



Fig. 2. I.

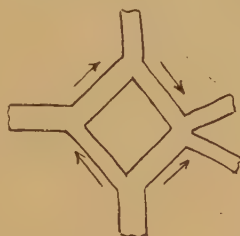


Fig. 2. II.

des tronçons, on doit avoir pour tous les tronçons issus d'un point (fig. 2, I) :

$$\Sigma \Phi = 0,$$

en comptant comme positifs les flux dont la direction positive va vers le point. Et, pour un contour fermé, pris dans un système de tronçons, (fig. 2, II) :

$$\Sigma \mathcal{R} \Phi - \Sigma \mathcal{E} = 0,$$

$\mathcal{E}$ étant compté comme positif lorsqu'il *tend* à produire un flux dans le sens des flèches.

Il en résulte que, pour une association en série, on doit avoir :

$$\mathcal{R} = \Sigma \mathcal{R}_n,$$

et, pour une association en parallèle :

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \Sigma \frac{1}{\mathcal{R}_n},$$

ou :

$$\mathcal{P} = \Sigma \mathcal{P}_n;$$

2. — *Analogie du circuit magnétique et du circuit électrique à trois dimensions.* — La théorie simplifiée précédente est très séduisante ; mais il ne faut pas oublier que l'on a assimilé le circuit magnétique, dont la section peut être très grande, à un circuit électrique formé de fils de section négligeable.

Peut-on pousser l'analogie aux circuits massifs et, même, jusqu'à quel point peut-on parler de circuit magnétique en dehors du cas idéal du tore ?

On peut décomposer un tronçon de circuit magnétique, compris entre deux surfaces équipotentiellles, en un certain nombre de tubes de force élémentaire, tout comme on décompose en lignes de courant le courant passant dans un conducteur massif. On peut donc définir la réluctance d'un tronçon de circuit magnétique d'une façon aussi rigoureuse que la résistance d'un conducteur à trois dimensions.

3. — *Entrefer*. — Il résulte de l'analogie entre le circuit électrique et le circuit magnétique qu'il ne peut exister de circuit magnétique ouvert.

Si nous considérons un tore ouvert (fig. 3), le circuit magnétique devra se fermer par l'air et l'on donnera le nom d'*entrefer* à cette partie (1).



Fig. 3.

Il est facile d'établir l'expression de sa réluctance dans le cas où les lignes des forces sont rectilignes, μ étant égal à l'unité dans l'air :

$$\mathcal{R} = \int \frac{dl}{S_n},$$

S_n étant une surface équipotentielle déterminée.

Si nous négligeons les pertes de flux, on doit avoir

$$\Phi = \frac{4\pi n I}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2},$$

$\mathcal{R}_1$ étant la réluctance du fer et $\mathcal{R}_2$ celle de l'entrefer.

La différence de potentiel magnétique entre les faces de cet entrefer est :

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi n I \mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}.$$

4. — *Circuits magnétiques parfaits et imparfaits*. — A vrai dire, il n'existe que des circuits magnétiques parfaits, mais, habituellement, dans un tronçon, on ne considère que la partie en fer sans s'inquiéter des régions de l'air environnant en parallèle avec elle. Aussi, comme on ne rencontre pas le même flux dans toutes les sections du fer du circuit, on dit que le circuit magnétique est *imparfait*.

Le circuit vraiment parfait n'existe qu'avec un tore de révolution bobiné *régulièrement*. S'il n'est bobiné qu'en un seul endroit, il y a des lignes

(1) On peut même considérer comme entrefer la fermeture par l'air d'un circuit magnétique formé par un simple barreau (voir Du Bois, *Magnetische Kreise*, page 45).

Les électro-aimants de ce genre sont dénommés improprement à circuit magnétique ouvert, ou sans circuit magnétique.

de force qui passent à travers l'air, auxquelles on a donné le nom de *lignes de fuites*.

Si l'on subdivise le circuit magnétique de ce tore en un certain nombre de tronçons (fig. 4), où le flux peut être considéré comme constant, on a :

$$4\pi nI = \mathcal{R}_1\Phi_1 + \mathcal{R}_2\Phi_2 + \mathcal{R}_3\Phi_3 + \dots = \int_c \Phi d\mathcal{R} = \int_c \mathcal{H} dl,$$

en appelant $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ les réluctances respectives de ces parties et $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ les flux correspondants. Si le flux est variable en chaque point d'une de ces parties, on peut écrire :

$$\mathcal{V} = \int \Phi d\mathcal{R} = \Phi_n \mathcal{R}_n,$$

Φ_n étant une valeur mesurée ou prédéterminée du flux en un point quelconque de cette région, ou encore, une valeur moyenne, et $\mathcal{R}_n$ la réluctance de cette partie correspondant à ce flux Φ_n .

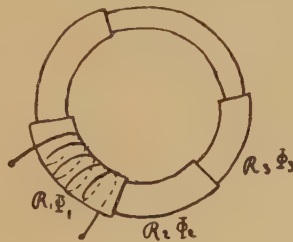


Fig. 4.

Ayant mesuré $\mathcal{V}$ et Φ_n , on pourra donc toujours définir $\mathcal{R}_n$ et $\mathcal{L}_n$ par :

$$\mathcal{R}_n = \frac{1}{\mathcal{L}_n} = \frac{\mathcal{V}}{\Phi_n}.$$

5. — *Coefficient de fuites*. — En général, dans un circuit magnétique, la force magnétisante ne se trouve pas dans la région d'utilisation du flux. Soient Φ_u , le flux dans la région où il est utilisé, et Φ , celui à l'endroit où se trouvent appliqués les ampères-tours d'excitation. On a toujours :

$$\Phi > \Phi_u.$$

On peut poser :

$$\Phi = v\Phi_u,$$

v étant le *coefficient d'Hopkinson*, toujours plus grand que l'unité puisque Φ est le plus grand de tous les flux rencontrés sur le circuit magnétique, toutes les lignes de force devant passer à l'intérieur des spires magnétisantes.

6. — *Flux de fuites*. — On peut encore poser :

$$\Phi = \Phi_u + \Phi_f,$$

Φ_f étant le flux de fuites.

Φ_f est la somme de tous les flux des tubes de force élémentaires passant dans l'air. On a :

$$\Phi_f = \int \mathcal{V} d\mathcal{L},$$

$d\mathcal{L}$ étant la perméance d'un de ces tubes de force, et $\mathcal{V}$ la différence de potentiel magnétique entre les points où ce tube sort et rentre dans le fer, l'intégrale devant porter sur tous les points amont et aval de la région où on a le flux Φ_u . On peut écrire :

$$\Phi_f = \int \mathcal{V} d\mathcal{L} = \mathcal{V}_n \mathcal{L}_n.$$

On peut donc considérer le flux de fuites comme étant issu de deux points ou *centres d'application*, choisis arbitrairement, entre lesquels il y a la différence de potentiel $\mathcal{V}_n$. Ces deux points sont choisis selon la

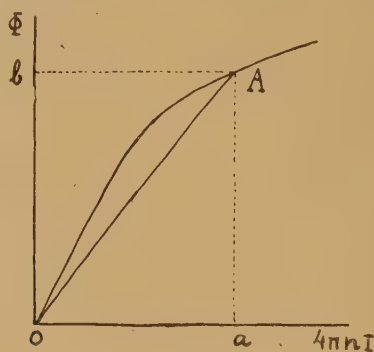


Fig. 5.

vraisemblance des choses ou la commodité des calculs. $\mathcal{L}_n$ est la perméance de fuites *correspondant* à $\mathcal{V}_n$.

La perméance $d\mathcal{L}$ d'un tube de force dans l'air est constante et indépendante de l'état de saturation du circuit, mais la répartition de $\mathcal{V}$ change avec cet état, aussi $\mathcal{L}_n$ est-il sensible à la variation de saturation.

Cette façon de définir la réluctance d'une région et la perméance de fuites correspond, presque toujours, à des expressions *incalculables* en pratique ; mais les *mesures* de ces quantités, faites dans les *conditions de définition*, ont une signification rigoureuse ; tout aussi rigoureuse, théoriquement, que la mesure d'une résistance massive entre deux surfaces.

7. — *Caractéristiques.* — On appelle *caractéristique* d'une partie de circuit magnétique la courbe des flux traversant cette partie en fonction des différences de potentiel magnétique absorbées par cette partie, exprimées en Gilbert ou en ampères-tours. On donne souvent le nom de *partielles* à ces caractéristiques, par opposition aux caractéristiques *totales* qui sont les courbes des flux en un endroit *déterminé*, en fonction de la force magnétomotrice totale placée sur le circuit magnétique. Nous considérerons encore, parmi les caractéristiques totales, la *caractéristique totale principale* qui est construite en fonction du flux total.

Les caractéristiques partielles sont des courbes de magnétisme, c'est-à-dire de l'induction $\mathcal{B}$, en fonction du champ $\mathcal{H}$ auxquelles on a fait subir un changement d'échelles (fig. 5).

Elles peuvent se relever expérimentalement en mesurant le flux et les ampères-tours d'excitation, ou se prédéterminer approximativement de la façon suivante, en supposant que l'on a affaire à des tronçons cylindriques. Soient Φ une valeur donnée du flux et S la section de la partie du circuit magnétique considérée, on a :

$$\mathcal{B} = \frac{\Phi}{S},$$

qui, en se reportant à la courbe de magnétisme, donne $\mathcal{H}$. Si l est la longueur de la partie envisagée, $\mathcal{H}l$ est la différence de potentiel magnétique

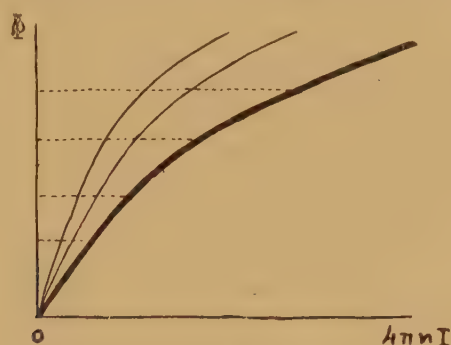


Fig. 6.

absorbée. Il suffit donc de multiplier les ordonnées de la courbe de magnétisme par S et les abscisses par l .

8. — *Représentation de la perméance et de la réluctance.* — Il est facile de voir que la perméance d'une région d'un circuit magnétique, se trouvant dans un état représenté par le point A (fig. 5) sur la caractéristique partielle de cette région, est mesurée par la tangente de l'angle que fait le rayon vecteur joignant l'origine au point A avec l'horizontale :

$$\mathcal{P} = \frac{Ob}{Oa} = \frac{\Phi}{4\pi nl},$$

Ob et Oa étant mesurés en se servant des échelles du dessin. Il ne faut pas oublier, en effet, que ces échelles ont des dimensions, d'où il résulte que le rapport ainsi obtenu est bien homogène à une perméance. La réluctance est représentée par la tangente du complément, c'est-à-dire de l'angle de OA avec la verticale :

$$\mathcal{R} = \frac{Oa}{Ob} = \frac{4\pi nl}{\Phi}.$$

Ces valeurs correspondent à celles de $\mathcal{R}_n$ et $\mathcal{P}_n$ définies plus haut.

9. — *Caractéristique résultante de plusieurs parties de circuits magnétiques groupées en série ou en parallèle.* — La réluctance d'un ensemble

de parties d'un circuit magnétique, placées en série et traversées par le même flux Φ , est égale à la somme des réluctances respectives de chaque partie. Comme celles-ci sont des fonctions de Φ , la réluctance totale sera aussi fonction de Φ , d'où l'intérêt de connaître la caractéristique résultante.

Cette caractéristique de l'ensemble s'obtient en additionnant *horizontalement* pour chaque valeur du flux les abscisses de toutes les caractéristiques partielles des parties considérées ; ces caractéristiques partielles étant évidemment construites à la même échelle (*fig. 6*). Cette construction n'est pas autre chose que la traduction de la proposition du début du paragraphe. La courbe résultante rappelle la forme des composantes ; en par-

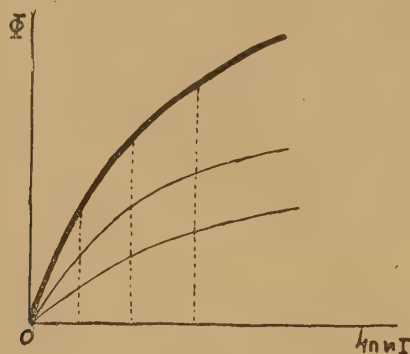


Fig. 7.

ticulier, si l'une de ces parties est un entrefer, sa caractéristique est une droite puisque μ est constant et égal à l'unité. Son action est d'atténuer la courbure de la résultante.

Le même problème, pour des tronçons de circuits magnétiques en parallèle, peut se résoudre, sachant que la perméance de l'ensemble est la somme des perméances de chacun d'eux.

La construction se fait, cette fois, par addition *verticale* des ordonnées (*fig. 7*). Si l'un des tronçons est constitué par des fuites à travers l'air, sa caractéristique partielle est sensiblement une droite, qui tend à adoucir la courbure de la courbe résultante.

Les cas de plusieurs parties en série, parcourues par des flux différents, procède à la fois des deux précédents : on commence par ramener chacune des parties à être parcourue par le même flux, en additionnant les fuites, puis on continue comme pour le premier cas.

10. — *Hystérésis*. — Nous n'avons pas, jusqu'ici, tenu compte de l'hystérésis. Le phénomène en lui-même est trop connu pour que nous ayons à le rappeler. Examinons seulement comment on peut l'introduire dans la théorie du circuit magnétique et comment il se concilie avec elle et les méthodes graphiques qui précèdent (1).

(1) Il est bien entendu dans toute cette question qu'il ne s'agit seulement que de l'hystérésis alternative.

La caractéristique d'un circuit magnétique présentant de l'hystérésis ne passe plus par l'origine et possède une forme qui dépend de l'histoire de ce circuit (*fig. 8*). Cette caractéristique n'est autre qu'une portion de cycle d'hystérésis, *cycle principal* si l'on produit une variation de flux $+\Phi_m$ à $-\Phi_m$, Φ_m étant le flux maximum, supérieur ou égal à tous ceux atteints jusqu'ici, à moins d'une désaimantation antérieure ; *cycle secondaire*, dans le cas d'une variation quelconque.

Les définitions de la perméabilité, de la réluctance et de la perméance perdent de leur signification si l'on garde leurs formes précédentes ; la perméabilité présente, en effet, une discontinuité pour $\mathcal{H} = 0$.

La façon la plus logique de lever cette discontinuité est de faire une

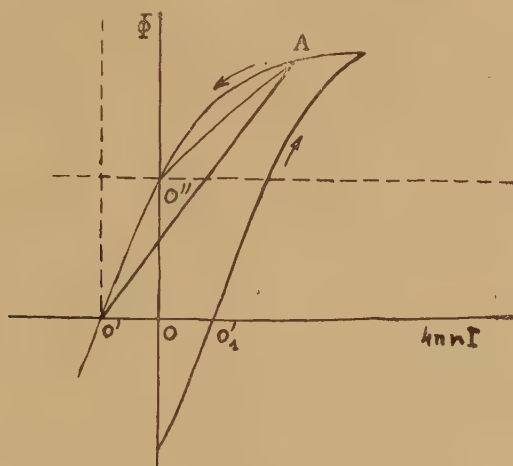


Fig. 8.

translation d'axe de coordonnées, de façon à amener la nouvelle origine sur la courbe.

Différents auteurs, en particulier M. Swyngedauw (1) admettent que l'hystérésis peut être regardée comme la superposition d'un flux Φ_0 — flux résiduel dépendant des traitements antérieurs du circuit magnétique — au flux dû aux ampères-tours placés sur le circuit magnétique. La nouvelle origine étant O'' (*fig. 8*) la réluctance et la perméance seront les tangentes des angles des axes de coordonnées avec le rayon vecteur $O''A$. Avec cette translation d'origine, la perméabilité se définit ainsi :

$$\mu = \frac{\Phi \pm \Phi_0}{\mathcal{H}S},$$

Φ étant le flux total existant, Φ_0 le flux résiduel, S la section du circuit magnétique supposée constante. Pour la totalité du circuit magnétique, on doit avoir :

$$\int \mathcal{H} dl = 4\pi nI = \mathcal{R}(\Phi \pm \Phi_0).$$

(1) SWYNGEDAUF, *Cours d'électrotechnique générale et appliquée*. Tome I, page 32

Cette façon de voir ne semble correspondre à aucune réalité physique.

Au contraire, nous avons proposé (1) la translation dans le sens perpendiculaire. Elle correspond, comme nous le verrons en plusieurs endroits dans le cours de cette étude, à des réalités physiques indiscutables.

On peut considérer l'hystérésis dans les problèmes d'électrotechnique comme due à l'existence préalable d'une force magnétomotrice fictive qui s'ajoute ou se retranche de celle de l'excitation normale. Les ampères-tours qui la produisent s'appellent généralement les ampères-tours *coercitifs*, nous préférons leur donner le nom d'*hystérétiques* — courant hystérétique ou excitation hystérétique — pour mieux faire comprendre le rôle qu'ils jouent.

Notre interprétation, ou plus exactement notre représentation, revient donc à transporter l'origine en O' ou O'_1 suivant la branche du cycle sur laquelle on se meut. La perméance et la réluctance se définiront comme étant les tangentes des angles du rayon vecteur $O'A$ avec les axes.

La perméabilité se définira cette fois de la façon suivante :

$$\mu = \frac{\Phi}{S(\mathcal{H} \pm \mathcal{H}_0)},$$

$\mathcal{H}_0$ étant le champ coercitif auquel nous attribuerons la même existence et les mêmes propriétés qu'au champ normal. Nous ne devons considérer que le champ résultant, ces deux champs ayant, bien entendu, même direction.

Nous allons signaler, en passant, une expérience dont on trouvera les détails plus loin et qui légitime déjà en partie notre interprétation de l'hystérésis (2).

Si l'on relève expérimentalement les caractéristiques totales d'un circuit magnétique à entrefer variable, pour deux valeurs de cet entrefer (*fig. 9*) (l'entrefer nul courbe C et un entrefer déterminé courbe C'), en partant du même flux maximum, les ampères-tours hystérétiques sont constants; autrement dit, les deux courbes se coupent en O' sur l'axe des abscisses.

Or, d'après nos hypothèses, on peut considérer la courbe C' comme étant déduite de la courbe C correspondant au fer seul et de la caractéristique C'' de l'entrefer qui se trouve introduit, caractéristique qui *part évidemment de l'origine et qui est une droite*.

La courbe C' doit donc se déduire de la courbe C en lui ajoutant horizontalement les abscisses de C'' . S'il en est ainsi, le point de rencontre des deux caractéristiques C et C' doit se trouver sur l'axe des ampères-tours. C'est bien ce que donne l'expérience, et si l'on construit la différence des abscisses de C et C' on trouve sensiblement une droite.

Ainsi, au moyen de notre hypothèse, les constructions précédemment

(1) ANDRÉ GUILBERT, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. Tome CLXXV, page 615. Séance du 16 octobre 1922.

R. G. E. *Sur le calcul de l'attraction des électro-aimants*. Tome XII, page 714.

(2) Voir § 32.

établies se conservent intégralement à la condition de rapporter toutes les caractéristiques au point O' .

Remarque. — Le flux maximum étant maintenu le même dans les deux cas, la caractéristique C du fer seul garde toujours la même forme et passe toujours par le même point O' quel que soit le nombre d'ampères-tours placés sur le circuit magnétique.

Fig. 9.

11. — *Loi d'établissement du courant dans une bobine à noyau de fer, soumise à une tension constante.* — Nous allons, comme exemple d'appli-

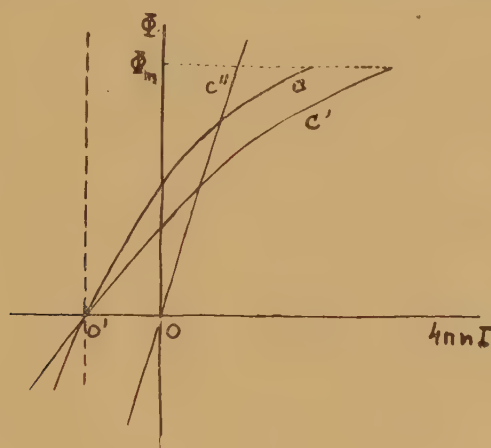


Fig. 9.

cation de la méthode graphique à la résolution des problèmes relatifs au ferro-magnétisme, donner une étude que nous avons faite sur la détermination de la loi d'établissement du courant dans une bobine placée sur un circuit magnétique présentant saturation et hystérésis.

Nous supposons qu'il n'y a pas de trainage magnétique, c'est-à-dire qu'à chaque instant il y a la correspondance donnée par la caractéristique totale principale entre le flux et le nombre d'ampères-tours.

Si U est la tension aux bornes, R la résistance de la bobine, nous avons la relation bien connue :

$$U = Ri + n \frac{d\Phi}{dt}.$$

Or on peut écrire :

$$n \frac{d\Phi}{dt} = n \frac{d\Phi}{di} \frac{di}{dt} = K \operatorname{tg} \beta \frac{di}{dt},$$

en appelant β l'inclinaison de la tangente à la courbe au point A représentant l'état dans lequel on envisage le système (fig. 10). On a, en effet,

$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4\pi n} \frac{d\Phi}{di}$. Si nous envisageons le problème dans le cas simple où le coefficient de self-induction L_0 du système est constant, c'est-à-dire où

l'on se déplace sur la partie droite de la caractéristique faisant l'angle α avec l'horizontale, on a l'équation :

$$U = Ri + L_0 \frac{di}{dt},$$

L_0 doit être égal à $K \operatorname{tg} \alpha$ en vertu de ce que nous avons écrit plus haut.

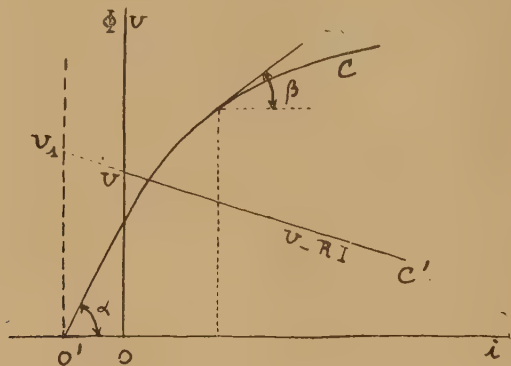


Fig. 10.

L'équation dans le cas général devient donc :

$$U = Ri + L_0 \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{di}{dt},$$

qui devra être intégrée graphiquement. On a :

$$t = \frac{L_0}{\operatorname{tg} \alpha} \int_0^{\frac{U}{R}} \frac{\operatorname{tg} \beta}{U - Ri} di.$$

On va donc construire par points la courbe de

$$\frac{L_0}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\operatorname{tg} \beta}{U - Ri}$$

en fonction de i , $\operatorname{tg} \beta$ étant pris sur la caractéristique C , et $U - Ri$ sur la droite C' (fig. 10).

On construira en fonction de i la courbe de l'aire comprise sous la courbe précédente depuis l'origine jusqu'au point d'abscisse i . Cette courbe partira de zéro (fig. 11). Si, quand il y a de l'hystérésis, on admet la translation de l'origine (1), on voit que l'on revient au cas où il n'y a pas d'hystérésis en prenant une tension U_1 égale à U , augmentée de la chute de tension due au courant hystérétique I_0 . On prendra alors comme origine de la courbe de i en fonction de t le point de la courbe d'ordonnée I_0 .

12. — Energie emmagasinée dans un circuit magnétique. — Reprenons

(1) Lorsqu'il y a de l'hystérésis, on prendra pour L_0 la valeur définie par $\frac{n\Phi}{i}$, i étant la somme algébrique du courant dû à la source et du courant hystérétique.

l'équation bien connue qui régit l'établissement du courant dans la — ou les — bobine d'excitation d'un circuit magnétique :

$$U = Ri + \frac{nd\Phi}{dt},$$

Φ étant le flux moyen à travers une spire et $n\Phi$ le flux total à travers toutes les spires.

Multiplions par idt :

$$Uidt = Ri^2dt + nid\Phi.$$

Si nous intégrons cette équation pendant toute la durée de l'établissement du courant, $\int Uidt$ est l'énergie totale fournie par la source, $\int Ri^2dt$ l'énergie perdue par effet Joule dans l'enroulement, et, enfin $\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} nid\Phi$

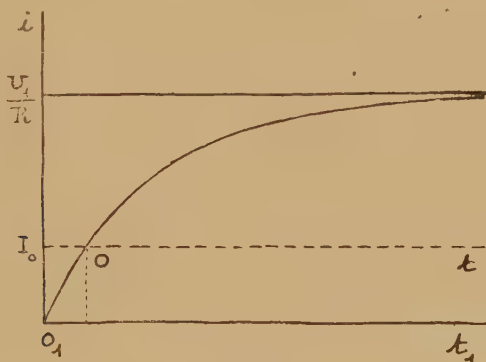


Fig. 11.

représente l'énergie dépensée pour amener le circuit magnétique depuis l'état primitif où il se trouvait avec un flux rémanent Φ_1 jusqu'à l'état actuel avec le flux Φ_2 .

Si nous considérons la caractéristique totale principale du circuit magnétique l'élément $nid\Phi$ est représenté par l'aire $abcd$ (fig. 12). L'intégrale est donc représentée par l'aire comprise entre la courbe et l'axe des flux, entre les ordonnées Φ_1 et Φ_2 (1).

Cette énergie absorbée par le circuit magnétique s'y trouve emmagasinée sous forme potentielle. Elle est rendue lorsque le courant vient à diminuer (2).

S'il y a de l'hystérésis, l'énergie rendue est plus petite que celle absorbée ; il y a un certain rendement. Si l'on décrit un demi cycle principal, l'énergie absorbée est représentée par l'aire $ACB'A$ (fig. 13) et celle resti-

(1) Voir A. PÉROT, Sur l'énergie des courants, *Eclairage électrique*. Tome XXII, page 5.

(2) Nous supposons que toute cette énergie sert à créer le champ et qu'il n'y a pas de chaleur réversible d'aimantation d'ailleurs toujours très faible en réalité.

tuée par ACBA. ABB'A représente donc l'énergie perdue dans un demi cycle.

Si l'on décrit un cycle secondaire, en se déplaçant entre les points A et B sans changer le sens du courant, l'énergie perdue se réduit au fu-

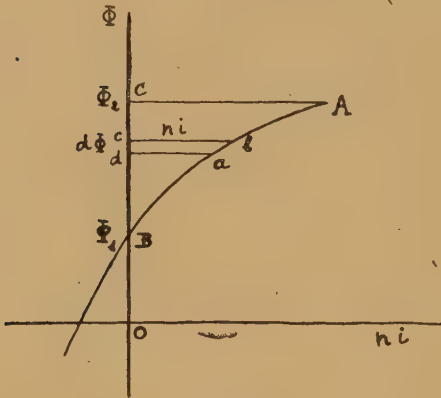


Fig. 12.

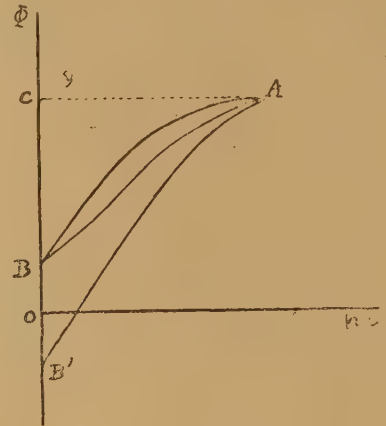


Fig. 13.

seau AB. Ce sont les pertes par hystérésis de cette nature que l'on doit envisager presque toujours dans les électro-aimants.

Tout ce qui précède est vrai, qu'il y ait des fuites ou non, du moment que l'on raisonne avec la caractéristique totale principale.

CHAPITRE II

ÉTUDE DU CIRCUIT MAGNÉTIQUE DÉFORMABLE.

Si le circuit magnétique précédemment étudié, comporte des éléments capables de se déplacer il se déformera sous l'action des forces qui vont s'exercer entre les parties fixes et les parties mobiles, en produisant un travail qui pourra être recueilli et utilisé à l'extérieur. On aura ainsi un électro-aimant déformable.

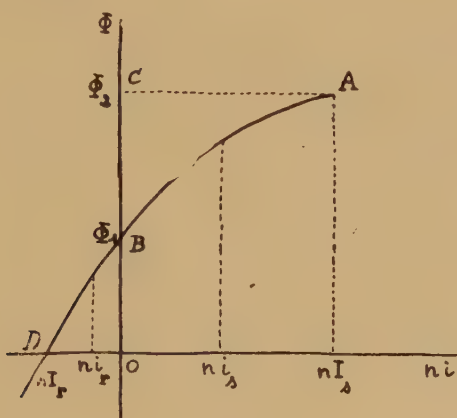


Fig. 14.

D'une façon générale on peut classer ces électro-aimants en deux catégories :

1° Les électro-aimants destinés à produire un travail du fait du déplacement de la partie mobile, appelée encore *armature*.

2° Les électro-aimants utilisés seulement pour leur « force portante », dont le circuit magnétique est fermé, soit par une armature appartenant à l'appareil même, soit par les corps eux-mêmes à soulever, comme c'est le cas pour les électro-aimants de levage.

La considération de la conservation de l'énergie va nous permettre d'évaluer ces travaux et ces efforts.

13. — *Calcul de l'attraction d'un électro-aimant.* — Nous supposerons d'abord, que le système envisagé ne présente pas de fuites, c'est-à-dire que le flux est le même dans toutes les parties du circuit magnétique.

Nous traiterons le problème directement dans le cas où il y a de l'hystérésis. Pour cela, nous supposerons que l'on a substitué au fer réel un fer idéal ayant même caractéristique (fig. 14), ne passant pas par l'origine, que

le fer réel, c'est-à-dire possédant du magnétisme rémanent, mais capable de décrire cette caractéristique d'une façon *reversible*.

Ce fer idéal possède à la température du fer réel la même répartition des champs et des inductions que celui-ci, nous supposons de plus qu'alors que cette répartition varie avec la température dans le fer réel, elle reste la même dans le fer idéal.

Cette substitution est légitime, car nous verrons que l'effort d'attraction ne dépend que des valeurs *actuelles* des flux et des courants. Après une telle substitution, la question, au point de vue thermodynamique, sera très simplifiée puisqu'il n'y aura plus ni dégagement ni absorption de chaleur au cours d'une variation de flux (1).

Nous prendrons comme variable, définissant la position de la partie mobile, la course x de cette partie, comptée à partir d'une origine quelconque, une de ses limites en général.

Soit ABD (fig. 14) la caractéristique du flux en fonction des ampères-tours d'excitation pour une valeur déterminée x de la course. Considérons l'électro-aimant dans l'état représenté par le point D correspondant à un flux nul et à une valeur du courant $-I_r$ produite en inversant la polarité de la source. Dans cet état le système possède une certaine énergie potentielle dont la valeur est *indépendante* de x , puisque, si l'on faisait varier x dans ces conditions, nous savons, en vertu de l'expérience du § 10 qu'il n'y aurait pas variation de flux et, par conséquent, pas de travail produit ou absorbé (2).

Pour décrire la caractéristique de D en B il faut diminuer progressivement le courant jusqu'à l'annuler. Il est facile de voir que dans cette opération le système *renvoie* une certaine quantité d'énergie à la source, représentée par l'aire BDOB, et égale à :

$$W_r = \int_0^{\Phi_1} ni_s d\Phi.$$

Pour décrire la courbe de B à A il faut, après avoir rétabli les connexions normales avec la source, faire varier le courant d'excitation de 0 à I_s .

Dans cette opération, la source *fournit* au système une certaine quantité d'énergie dont la valeur représentée par l'aire ACBA est égale à :

$$W_s = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} ni_s d\Phi.$$

L'augmentation d'énergie potentielle du système, en passant de D en A, est donc égale à (3) :

$$W_s - W_r = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} ni_s d\Phi - \int_0^{\Phi_1} ni_s d\Phi.$$

(1) Nous évitons aussi d'avoir à tenir compte de la variation de la perméabilité avec la température, connue sous le nom d'effet Thomson.

(2) M. Liénard nous a fait remarquer que cette expérience, vraie dans les cas pratiques, ne serait plus vraie pour un circuit magnétique formé d'un tore très large où l'induction varie beaucoup dans l'étendue d'une surface équipotentielle et où le flux peut être nul, alors que l'induction ne l'est pas.

(3) Nous remarquons que pour $I = 0$, l'énergie potentielle du système passe par un minimum.

Pour différencier les courants, qui sont ici de sens contraire dans les deux termes, nous avons mis les indices s et r (source et rémanent). Si nous avons pris la branche ascendante du cycle d'hystérésis, ces courants auraient été de même sens, mais le flux Φ_1 négatif. Aussi pour que cette dernière expression soit *générale*, nous conviendrons de prendre dans tout ce qui va suivre les valeurs *algébriques* de Φ_1 et de i_r , de sorte qu'il faudra écrire :

$$W = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} ni_s d\Phi + \int_0^{\Phi_1} ni_r d\Phi + C,$$

W étant l'énergie potentielle totale et C une constante que nous avons pu être indépendante de x .

Le flux Φ est fonction de $ni = ni_s - ni_r$ à x constant, relation représentée par la figure 14. On peut prendre ni et x comme variables indépendantes, et poser :

$$\Phi = \Phi(x, ni).$$

L'expression de l'énergie potentielle pour une valeur donnée de x peut donc s'écrire :

$$W = \int_0^{ni_s} ni_s \frac{\partial \Phi}{\partial ni} dni + \int_{ni_r}^0 ni_r \frac{\partial \Phi}{\partial ni} dni + C = W(x, ni) + C,$$

I_s et I_r étant respectivement le courant d'excitation normal correspondant au flux Φ_2 et le courant coercitif.

Laissons maintenant le circuit magnétique libre de se déformer d'une façon infiniment petite, caractérisée par la variation dx de la course. Le travail élémentaire fourni par la source pendant la déformation est (1) :

$$ni_s d\Phi = ni_s \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{ni=ni_s} dx + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial ni} \right) dni \right].$$

Ce travail doit accomplir, d'une part, le travail du système contre les forces extérieures Fdx , si F est la force s'exerçant sur la partie mobile (2) ; et, d'autre part, fournir l'accroissement dW de l'énergie potentielle emmagasinée dans le circuit, accroissement dû à la variation élémentaire du flux pendant cette déformation.

Cette variation de flux s'accompagne presque toujours d'une variation du courant de la source I_s . Il faudra donc dériver W_s par rapport à x et à ni_s ou ni . Au contraire W_r est indépendant de cette variation de ni_s , puisqu'il correspond en somme à des régimes de courants antérieurs à l'instant considéré ; il faudra donc le dériver seulement par rapport à x . On a donc :

$$\begin{aligned} ni_s \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{ni=ni_s} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial ni} dni \right] &= Fdx + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{ni_s} ni_s \frac{\partial \Phi}{\partial ni} dni \right) dx \\ &+ \frac{\partial}{\partial ni} \left(\int_0^{ni_s} ni_s \frac{\partial \Phi}{\partial ni} dni \right) dni + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{ni_r}^0 ni_r \frac{\partial \Phi}{\partial ni} dni \right) dx, \end{aligned}$$

(1) Il n'est pas nécessaire de supposer, comme on le fait souvent, que cette déformation a lieu suffisamment lentement pour que le courant I_s garde la même valeur, c'est-à-dire que l'on a affaire à une déformation virtuelle. Elle peut être considérée comme étant une phase très courte du fonctionnement normal de l'appareil.

(2) Normalement x est un déplacement rectiligne. Dans le cas d'un électro-aimant où la partie mobile pivote autour d'un axe, on peut définir sa position au moyen de l'angle qu'elle fait avec une direction origine. Dans ce cas le mot force doit être remplacé par le mot couple.

qui peut s'écrire, en remarquant tout de suite que les termes contenant les dérivées par rapport à ni se détruisent dans les deux membres, et en intégrant les $\int$ par parties :

$$nI_s \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{ni=nI_s} dx = Fdx + \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[ni_s \Phi \right]_0^{nI_s} + \left[ni_r \Phi \right]_{nI_r}^0 \right) dx - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{nI_s} \Phi dni + \int_{nI_r}^0 \Phi dni \right) dx,$$

ou encore, en divisant les deux membres par dx et en remarquant que x et ni sont indépendants :

$$nI_s \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{ni=nI_s} = F + nI_s \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{ni=nI_s} - \int_{nI_r}^{nI_s} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dni;$$

$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{ni=nI_r}$ est nul puisqu'il n'y a pas de variation de flux pour I_r , le flux étant toujours nul en vertu de l'expérience du § 10.

Il s'ensuit donc que l'on a :

$$F = \int_{nI_r}^{nI_s} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dni, \quad 1)$$

la dérivée $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ étant prise à ni constants, et I_r en valeur algébrique. Le sens de la force est celui dans lequel se produit une augmentation de flux.

Cette formule est fondamentale, elle résume toute la théorie de l'électro-aimant, mais, établie d'une façon aussi mathématique (1), elle ne met pas en évidence le mécanisme du phénomène qui s'est passé pendant la déformation. Pour nous en rendre compte, nous allons reprendre graphiquement sa démonstration (2).

Reprenons le circuit magnétique constitué par le fer idéal dans l'état représenté par le point D (fig. 15). Nous allons lui faire décrire à partir de cet état un cycle fermé en quatre temps.

1° Partant du point D, nous allons lui faire décrire la branche DBA en maintenant x constant. Nous avons vu que la source reçoit en premier lieu l'énergie représentée par BDOB, puis fournit au système celle représentée par ACBA.

2° Donnons à l'armature un déplacement dx ; on peut dire qu'il y a, suivant le sens de ce déplacement, création ou destruction d'un tronçon élémentaire du circuit magnétique, d'air en général. Si OE est la carac-

(1) La démonstration que nous donnons est une généralisation de celle de M. Lehmann dans laquelle il n'est pas tenu compte de l'existence du magnétisme rémanent ni de la thermodynamique. (Calcul de l'attraction magnétique dans les machines dynamo électriques lorsque la loi de Maxwell est insuffisante RGE. Tome VI, pages 754 et 802).

(2) Voir à ce sujet : J. HOPKINSON, Force exercée par un électro-aimant sur son armature. *The Electrician*, 25 mai 1894. *Lumière électrique*, t. LII, page 491. — A. PÉROT, Sur l'énergie des courants. *Eclairage électrique*, t. XXII, page 5. — BOY DE LA TOUR, Sur la force portante des électro-aimants. *Industrie électrique*, t. IX, page 10.

téristique partielle de cet élément, la nouvelle caractéristique totale du système s'obtiendra en ajoutant ou en retranchant horizontalement pour chaque ordonnée les abscisses correspondantes des deux courbes DBA et OE. Soit DB'A', si nous supposons qu'il y a eu création d'un tronçon. Dans ce cas, il y a eu le travail mécanique Fdx dépensé par l'observateur

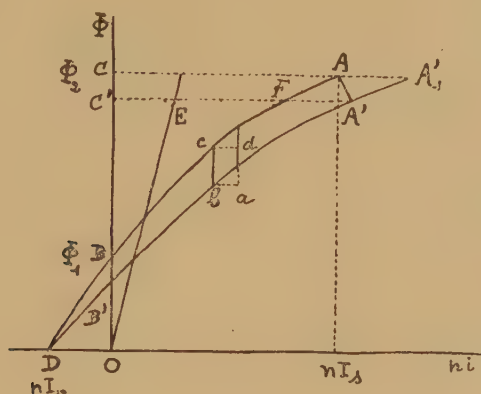


Fig. 15.

au profit du système, et le travail représenté par ACC'A'A renvoyé à la source, que la déformation ait lieu ou non à ampères-tours constants (1).

3° Ensuite revenons de A' en D suivant A'B'D en maintenant constante la valeur actuelle $x + dx$ de la course.

4° Enfin, de retour au point D, ramenons l'armature à sa position initiale, ce qui se fait sans manifestation d'énergie et termine le cycle.

Puisque le fer idéal est supposé avoir des propriétés indépendantes de la température, la somme des énergies électriques et mécaniques, mises en jeu au cours d'un cycle fermé, est toujours nulle puisqu'il n'y a pas de chaleur dégagée ou absorbée.

Nous avons donc, en dressant le bilan des travaux fournis et absorbés par ce système :

ENERGIE FOURNIE

- 1° BDOB
- 2° ACC'A'A
- 3° A'C'B'A'
- 4° O

ENERGIE ABSORBÉE

- ACBA
- Fdx
- B'DOB'
- O

D'où en retranchant l'énergie fournie de l'énergie absorbée :

$$ACC'A'A + A'C'B'A' - ACBA + BDOB - B'DOB' - Fdx = 0,$$

ou encore :

$$ACB'A'A - ACBA + BDB'B - Fdx = 0 ;$$

(1) Dans le premier cas le point A' se trouve sur la même verticale que le point A.

d'où l'on déduit que :

$$Fdx = ADA'A, \quad 3)$$

qui est égale au second ordre près à :

$$Fdx = dx \int_{nl_r}^{nl_s} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dni,$$

en remarquant que cette aire se compose d'éléments parallélogrammes ou rectangulaires équivalents, tels que $abcd$ dont la base est dni et la hauteur $\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx$, puisque pour passer de c en b le flux doit varier à ampères-tours constants.

Dans le deuxième temps du cycle, il y a eu, d'une part, création d'un tronçon de circuit magnétique qui nécessite un travail représenté par l'aire $EC'OE$, puisqu'il faut, en somme, intercaler ce tronçon à l'état neutre et l'amener du flux zéro au flux Φ_2 . Cette aire est égale à l'aire $A'FDA'$, c'est-à-dire au deuxième ordre près à Fdx , de la façon même dont a été déduite la courbe $DB'A'$ de DBA . D'autre part, il y a eu diminution du flux dans l'ancien circuit, considéré maintenant comme un tronçon du nouveau. Cette diminution se fait évidemment en se déplaçant sur la première caractéristique de A en F comme si x était resté constant. Le travail rendu à la source dans cette transformation est représenté par l'aire $ACC'FA$.

Nous voyons, d'après cela, que tout se passe comme si le travail de la force d'attraction dans un déplacement élémentaire venait uniquement de la libération de l'énergie potentielle emmagasinée dans l'élément du circuit magnétique qui se trouve supprimé du fait de ce déplacement.

La source ne fournit que l'énergie nécessaire à la variation de flux dans le restant du circuit magnétique.

L'attraction apparaît donc comme un phénomène purement local, indépendant, pour une déformation déterminée, de la composition et des dimensions du reste du circuit magnétique (1).

Elle ne dépend donc que du flux et non du nombre total d'ampères-tours ; elle reste la même pour une déformation déterminée et un flux donné, quelle que soit la façon dont celui-ci est produit ; c'est-à-dire quels que soient les caractéristiques du circuit extérieur à la région envisagée et le rémanent qui peut y exister. En particulier, la source elle-même peut être supprimée et il n'y a pas, comme on l'a souvent montré, de différence de principe entre l'attraction d'un aimant et celle d'un électro-aimant.

Dans le fonctionnement d'un électro-aimant, l'énergie mécanique, produite par le déplacement de l'armature, vient évidemment de la source, mais elle a été fournie un instant auparavant pendant la période d'établissement du courant, et elle a été emmagasinée dans la région déformable du circuit magnétique.

(1) Nous ferons néanmoins, dans ce qui va suivre, presque toujours l'étude de la totalité du circuit magnétique, parce que, au point de vue expérimental, ce n'est que dans ces conditions que l'on peut faire des mesures rigoureuses.

D'autre part, si l'opérateur déforme lui-même le circuit, l'énergie mécanique qu'il doit dépenser se transformera en énergie potentielle, qui pourra se retransformer en énergie mécanique par un déplacement en sens contraire. Le système apparaît donc comme un véritable ressort ; ce sont là surtout les conditions de marche de l'aimant. Nous reviendrons sur ce point, à la fin du chapitre, à propos du rendement des électro-aimants.

Nous ferons remarquer enfin qu'il n'est pas nécessaire de supposer que le courant ne *varie pas* pendant la déformation, comme l'ont fait plusieurs auteurs. Il en résulte que l'effort dynamique s'exerçant dans un déplacement rapide de l'armature est encore donné par la formule 1), à la condition de prendre pour I le courant résultant de l'action de la tension appliquée aux bornes et de la force contre électromotrice développée par la variation de flux.

14. — *Formes diverses données à la formule 1).* — Nous allons passer en revue (1), en les discutant, les différentes formes que l'on a données à la formule 1). On peut les classer en deux catégories :

1° Formules en fonction du courant d'excitation ou des ampères-tours.

2° Formules en fonction du flux ou de l'induction.

Les premières, au dire de leurs auteurs, ne seraient plus valables dans le cas où il y a de l'hystérésis, alors que les secondes le seraient. Nous montrerons que cette distinction n'existe pas, grâce à notre conception de l'hystérésis.

15. — *Formules en fonction du courant d'excitation.* — Nous savons d'après la théorie du circuit magnétique que l'on a :

$$\Phi = 4\pi ni\mathfrak{L},$$

en appelant $\mathfrak{L}$ la perméance totale du circuit magnétique que nous supposons, pour l'instant, dépourvu de fuites et d'hystérésis.

Nous pouvons poser :

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\Phi, x) \quad \text{ou bien} \quad \mathfrak{L} = \mathfrak{L}(ni, x),$$

puisque entre ni , Φ et x existe la relation $\Phi = \Phi(ni, x)$.

Si nous dérivons ces deux expressions de $\mathfrak{L}$ par rapport à x nous aurons deux sortes de dérivées partielles :

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\right)_{\Phi} = \text{Cte} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\right)_{ni} = \text{Cte}.$$

L'usage a consacré les notations $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}$ pour la dérivée à flux constant et $\frac{d\mathfrak{L}}{dx}$ pour la dérivée à ampères-tours constants.

(1) Nous donnons dans ce qui va suivre des démonstrations souvent différentes de celles de leurs auteurs afin d'avoir plus d'unité dans la présentation et de pouvoir soulever des critiques.

Si donc nous dérivons l'expression de Φ à ampères-tours constants, nous pouvons l'écrire :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4\pi ni \frac{d\mathcal{R}}{dx} = 4\pi ni \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Supposons tracée la caractéristique OA du circuit magnétique (fig. 16) ; nous savons que la perméance est représentée par :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{4\pi} \frac{Aa}{Oa}.$$

Soit, après un déplacement dx de l'armature, OA' la nouvelle caractéristique obtenue par le procédé précédemment exposé.

Si la déformation a eu lieu à *ampères-tours constants*, le point figuratif A est passé en A', de sorte que la diminution de flux est AA' et que la diminution de perméance correspondante $\frac{d\mathcal{R}}{dx} dx$ est représentée par $\frac{1}{4\pi} \frac{AA'}{Oa}$.

Or, on peut passer de A en A' en suivant un chemin quelconque. En particulier, on peut d'abord faire subir au système une déformation à *flux total constant*, le point A venant en A₁'. La nouvelle perméance est : $\frac{1}{4\pi} \frac{A_1'a_1'}{Oa_1'} = \frac{1}{4\pi} \frac{A''a}{Oa}$.

La diminution de perméance venant de cette déformation est donc représentée par $\frac{1}{4\pi} \frac{AA''}{Oa}$ qui correspond à $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} dx$. Tout se passe dans ce cas comme si la caractéristique du système était la droite OA puisque, n'ayant pas à craindre de variation de perméance due à une variation de flux, on peut remplacer, sans rien changer à la position du point A₁' donnée par AA₁' = CE, le circuit magnétique réel par un autre de perméabilité constante.

Ensuite, à partir de l'état A₁', nous allons chercher la variation de perméance à x constant, consécutive à la variation de flux A₁'a₁' — A'a = AA' qui s'était produite dans la déformation à *ni constants*.

Le point A₁' est venu en A' ce qui correspond à une *augmentation* de perméance $\frac{1}{4\pi} \frac{A'A''}{Oa}$ qui n'est autre chose que la traduction de

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{nl = \text{Cte}} dx.$$

Finalement nous avons bien après ces deux variations :

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{AA''}{Oa} - \frac{A'A''}{Oa} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{AA'}{Oa},$$

qui traduit graphiquement l'équation 4).

Si l'on appelle α et β les angles respectifs de la droite OA et de la tangente à la caractéristique en A avec l'horizontale, les tangentes de ces angles représentent, en tenant compte des échelles, la perméance $\mathcal{R}$ du

La caractéristique partielle de l'élément de circuit magnétique ainsi ajouté ou supprimé est donc une *droite* passant par l'origine, à la condition semble-t-il que la répartition des lignes de force y soit *indépendante* de la valeur du flux, ainsi que dans les régions immédiatement voisines.

Il faut remarquer que dans la démonstration de la formule 1), la considération de l'énergie à partir de l'état neutre ne sert que de base au raisonnement et ne correspond à aucune réalité physique. Il n'y a vraiment que dans la création de l'élément du circuit magnétique qu'il faille remonter à l'origine des flux. Cet élément se trouve virtuellement créé et introduit dans un circuit magnétique n'ayant subi qu'une modification d'état élémentaire (1). Il suffit donc de faire l'hypothèse suivante indiquée par M. Pérot (2) : que la déformation ne modifie en rien le tracé des lignes de force en dehors de l'élément créé, surtout dans l'entrefer.

Cela semble à peu près réalisé dans le cas où les parties voisines de l'entrefer sont soumises à une induction variant peu d'un point à un autre, par exemple un entrefer où les lignes de force sont à peu près rectilignes et où les pièces polaires ne présentent pas d'angles vifs. Pratiquement il semble qu'il suffise de saturer légèrement le circuit magnétique pour qu'il en soit ainsi ; dans le cas de l'électro-plongeur il faut, pour que la caractéristique soit droite, qu'il n'y ait pas, pendant la déformation, introduction de fer saturé dans le circuit magnétique.

Considérons toujours les deux caractéristiques du système correspondant à deux positions infiniment voisines de l'armature (*fig. 16*). Le travail de la force d'attraction $Fd\lambda$, développé pendant la déformation, est représenté par l'aire du triangle OCE, ou par l'aire curviligne ASOS'A₁A qui lui est égale et qui peut être remplacée, elle-même, par l'aire du triangle ADOD'A₁ construite dans le cas où l'on suppose constante la perméabilité du circuit magnétique. L'attraction, dans ce dernier cas, doit donc être la *même*. M. Liénard explique cette particularité ainsi (3) : « Les efforts ne dépendent que des valeurs actuelles des courants et des intensités d'aimantation. Ils ne changent donc pas, pour des valeurs données de x et des ampères-tours, si l'on substitue à la matière réelle une matière idéale parfaitement douce — c'est-à-dire à perméabilité constante — dont la perméabilité en chaque point, serait précisément égale à celle que possède dans l'état considéré la matière réelle. Il est, en effet, évident que ce changement laisserait invariables les intensités d'aimantation en chaque point. »

On a, au second ordre près :

$$ADOD'A_1 = \frac{1}{2} Oa \times AA'' ;$$

mais nous avons vu que :

$$AA'' = 4\pi Oa \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right)_A dx = 4\pi n I_s \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right)_A dx,$$

(1) C'est grâce à cette remarque que l'on a pu éliminer les phénomènes thermodynamiques au début de ce chapitre parce qu'ainsi l'attraction ne dépend que des conditions actuelles du système.

(2) A. PÉROT. Sur l'énergie des courants. *Eclairage électrique*. T. XXII, page 5.

(3) A. LIÉNARD, R.G.E. T. XIV, page 563.

la dérivée $\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}\right)_A$ étant prise à flux constant pour la valeur correspondant au point A, c'est-à-dire en supposant la perméabilité du circuit magnétique constante. Il vient donc :

$$Fdx = \frac{1}{2} nI_s \times 4\pi nI_s \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}\right)_A dx = 2\pi(nI_s)^2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}\right)_A dx.$$

D'où

$$F = 2\pi(nI_s)^2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}\right)_A = 2\pi(nI_s)^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mathcal{R}}\right)\right]_A \quad (7)$$

formule donnée par M. Pérot en 1900 (1).

Elle ne suppose aucune hypothèse sur la forme des caractéristiques du reste du circuit magnétique, qui peut être aussi saturé que l'on veut, du moment qu'il n'y a pas déformation sensible du tracé des lignes de force dans une déformation élémentaire.

Vaschy, dans son traité d'électricité et de magnétisme (2) donna, en 1890, une formule dans laquelle il introduisit une quantité parfaitement définie sur laquelle tout le monde est d'accord : le coefficient de self-induction L du circuit magnétique, levant ainsi avant la lettre les objections que l'on pourrait faire à l'introduction de la théorie du circuit magnétique dans la formule de l'attraction (3). On a, en effet,

$$L = \frac{n\Phi}{i} = 4\pi n^2 \mathcal{E},$$

d'où :

$$F = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x}, \quad (8)$$

formule établie dans le cas où la perméabilité est constante. Nous avons mis $\frac{\partial L}{\partial x}$ dérivée à flux constant pour lui donner la même généralité que celle de M. Pérot sous réserve de faire la même hypothèse.

M. Picou a donné en 1907 (4) une démonstration de la formule 7) voisine de celle de la formule de Vaschy où il est encore nécessaire de supposer constante la perméabilité de tout le circuit magnétique.

16. — *Introduction de l'hystérésis dans les formules en fonction du courant d'excitation.* — Nous avons établi que la formule de l'attraction était, lorsque l'on tient compte de l'hystérésis :

$$F = \int_{nI_r}^{nI_s} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dni, \quad (4)$$

(1) PÉROT. Sur l'énergie des courants. *Eclairage électrique*. T. XXII, page 5.

(2) VASCHY, *Traité d'Electricité et de Magnétisme*. T. II, page 33.

(3) Le coefficient de self-induction L dans ce cas n'a vraiment de signification que s'il est mesuré, car il est incalculable rigoureusement, tout comme la perméance et la réluctance. Les deux notions sont donc bien équivalentes.

(4) R.-V. PICOU. Loi de l'attraction magnétique à distance et des applications. *Bulletin de la S.I.E.*, 2^e série. T. VII, page 307.

qui devient, si l'on remplace $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ par sa valeur en fonction de la perméance totale :

$$F = 4\pi \int_{nI_r}^{nI_s} ni \frac{d\mathcal{R}}{dx} dni.$$

Supposons que nous nous trouvons sur la branche descendante du cycle de l'hystérésis, nous voyons que, pour $i = 0$, l'élément prend une forme illusoire si l'on continue à prendre le point O comme origine pour compter les ampères-tours et les perméances (fig. 17). Il est à remarquer que la seule façon de lever cette indétermination est précisément de faire la *trans-*

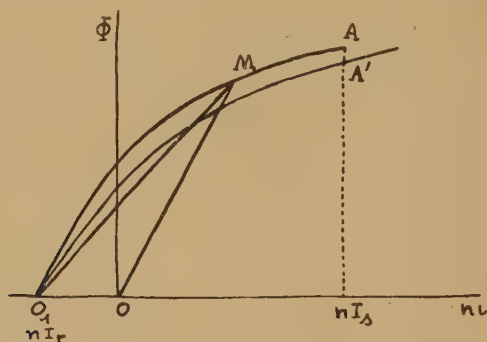


Fig. 17.

lation d'origine en O_1 que nous avons proposée au chapitre précédent. La nouvelle perméance $\mathcal{R}_h$ exprimée par la pente de la droite O_1M a une valeur finie et continue, ainsi que sa dérivée, pour tous les points de la courbe AO_1 ,

Il est à remarquer que la translation verticale de l'origine conduirait à soustraire l'une de l'autre, au lieu de les ajouter, les deux parties de l'aire $AO_1A'A$ situées de part et d'autre de l'axe des flux.

La formule, dans le cas de l'hystérésis, devient donc (1) :

$$F = 4\pi \int_0^{-nI_r + nI_s} n(-i_r + i_s) \frac{d\mathcal{R}_h}{dx} dni,$$

ou, si l'hypothèse nécessaire à l'intégration est satisfaite :

$$F = 2\pi(-nI_r + nI_s)^2 \frac{\partial \mathcal{R}_h}{\partial x}.$$

Ces formules ne donnent, du reste, pas de résultats différents de ceux donnés par les formules 6) et 7) correspondant au cas où le circuit magnétique est dépourvu d'hystérésis, puisque l'énergie emmagasinée dans la portion d'entrefer supprimée est la même. Ce n'est simplement qu'une nouvelle façon de voir les choses qui légitime un peu plus notre interprétation de l'hystérésis, mais n'apporte rien de nouveau au problème (2). Nous avons

(1) Ne pas oublier qu'il convient de mettre le signe — devant nI_r d'après les conventions de signes établies.

(2) Dans le cas de la formule de Vaschy, il faut définir le coefficient de self-induction comme étant le rapport du flux total au courant de la source, augmenté du courant hystérétique.

généralisé cette remarque de la façon suivante qui nous sera extrêmement utile, par la suite.

Théorème. — Dans l'application de la formule de l'attraction des électro-aimants, on peut compter les ampères-tours à partir d'une origine quelconque à la condition de prendre pour perméance ou réluctance celle définie à partir de cette origine.

Ce théorème pourrait se passer de démonstration, puisque, dans tous les cas, la formule utilisée revient à exprimer l'aire élémentaire COEC représentant l'énergie potentielle libérée par la déformation du circuit magné-

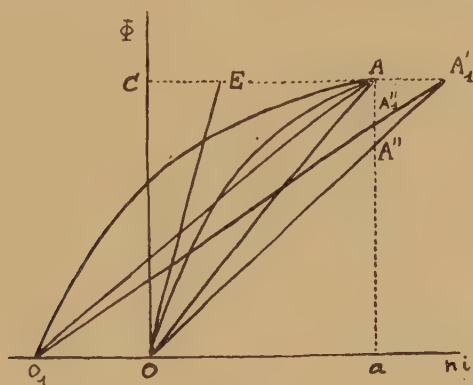


Fig. 18.

tique (fig. 18). Il est, néanmoins, intéressant d'en donner une pour pouvoir faire quelques remarques.

Soit, $\mathcal{P}$ la perméance correspondant à l'état représenté par le point A, lorsque le système est rapporté à l'origine O ; nous avons :

$$\mathcal{P} = \frac{\Phi}{4\pi nI_s},$$

nI_s étant les ampères-tours représentés par Oa .

Lorsque l'on rapporte le système à l'origine O_1 , la perméance correspondant au point A devient :

$$\mathcal{P}_1 = \frac{\Phi}{4\pi(nI_s + OO_1)}.$$

Lorsque nous faisons une déformation élémentaire à flux constant, ces deux quantités subissent respectivement les accroissements suivants :

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} dx = - \frac{\Phi}{4\pi(nI_s)^2} dni$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial x} dx = - \frac{\Phi}{4\pi(nI_s + OO_1)^2} dni,$$

puisque OO_1 est constant.

On voit immédiatement que :

$$\frac{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x}} = \frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{E}_1^2}.$$

D'autre part les ampères-tours agissant dans les deux cas sont dans le rapport inverse des perméances, on a donc :

$$\frac{nI_s}{nI_s + 00_1} = \frac{0a}{0_1a} = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}}$$

Si maintenant nous appliquons la formule (7) relativement à l'origine O_1 , il vient :

$$F = 2\pi(nI_s + 00_1)^2 \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x} = 2\pi(nI_s + 00_1)^2 \frac{\mathcal{E}_1^2}{\mathcal{E}^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = 2\pi(nI_s)^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}$$

qui n'est autre, en dernier lieu, que le résultat de l'application relativement à l'origine O , ce qui démontre la proposition.

On démontrerait facilement ce théorème dans le cas de la formule de M. Liénard.

Corollaire. — De ce théorème, nous pourrions tirer la conséquence suivante, très utile en pratique : on peut appliquer la formule de Pérot et Picou à un tronçon seulement du circuit magnétique d'un électro-aimant — pourvu qu'il contienne la partie déformable — en prenant comme perméance la perméance de ce tronçon et comme ampères-tours les ampères-tours qui y sont absorbés.

17. — *Application pratique des formules en fonction du courant d'excitation.* — Comme conséquence immédiate du paragraphe précédent, on peut calculer l'effort en un point donné de la course en négligeant l'hystérésis et en prenant une caractéristique passant par l'origine, en particulier le lieu du sommet des cycles d'hystérésis. Cette proposition est, comme nous le verrons, la base même de la réussite de nos vérifications expérimentales.

Il n'en est plus de même lorsque l'on veut déduire la loi de variation à excitation constante des efforts en fonction de l'entrefer, la forme des caractéristiques intervenant forcément. Nous allons traiter ce problème.

Nous avons signalé autrefois (1) que l'on pouvait décomposer le circuit magnétique en deux parties ; une partie dite *partie indéformable*, qui correspond au circuit magnétique lorsque l'armature est en fin de course, et une autre, dite *partie déformable*, constituée par le tronçon qui se trouve ajouté lorsque l'armature n'est plus au bout de sa course.

La première partie comprend toute la partie fixe ou culasse de l'électro-

(1) André GUILBERT, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. T. 175, p. 615. Sur le calcul de l'attraction des électro-aimants. R.G.E. T. XII, p. 714.

aimant et une partie, ou la totalité, de l'armature ; elle peut comprendre aussi un certain entrefer, dit *entrefer résiduel* et des joints. La deuxième partie comprend l'entrefer qui s'est introduit au cours du fonctionnement de l'appareil. Dans le cas d'un électro-plongeur, elle peut comprendre du fer qui se substitue graduellement à l'air. On est en droit d'appliquer la formule de Pérot et Picou à la partie déformable seule (1).

La perméance $\mathcal{P}_2$ de la partie déformable est une chose qui peut être relativement facile à calculer, ou tout au moins, à évaluer. $\mathcal{P}_2$ ne dépend théoriquement que des dimensions géométriques de l'entrefer et des parties voisines. En réalité, elle doit dépendre légèrement de la nature du fer du

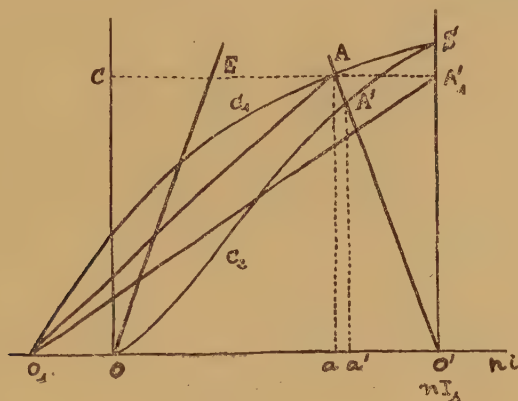


Fig. 19.

circuit magnétique et de son état de saturation, mais elle en dépend d'une façon si peu sensible que la mesure de $\mathcal{P}_2$ en fonction de la course peut être faite, une fois pour toutes, pour une série déterminée d'appareils géométriquement semblables.

On aura donc comme expression de l'effort en chaque point de la course :

$$F = 2\pi (ni)_{\text{eff}}^2 \left(\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial x} \right)_{x=x_0} \quad (7')$$

$(ni)_{\text{eff}}$ étant les ampères-tours *effectifs* ou *actifs*, c'est-à-dire ceux absorbés par la partie déformable pour la valeur x_0 de la course et $\left(\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial x} \right)_{x=x_0}$ la dérivée de $\mathcal{P}_2$ pour cette même valeur.

Il ne reste qu'à déterminer $(ni)_{\text{eff}}$ connaissant les ampères-tours totaux constants placés sur le circuit magnétique et la caractéristique partielle de la partie indéformable.

Soit précisément C_1 cette caractéristique (fig. 19). Supposons que pour l'entrefer x_0 la caractéristique de la partie déformable soit OE, rectiligne dans la plupart des cas.

Il s'agit de trouver le point A tel que $CA + CE = ni$. Pour cela, il

(1) Cette application pratique de la formule de Pérot et Picou qui se déduit de notre théorème a été signalée par M. RATEAU. *Cours d'électricité industrielle de l'Ecole des Mines*, 1907-1908, page 18.

On peut évaluer l'aire $ASO_1S'A'A$ (fig. 20) qui, en vertu de ce que nous avons établi, représente le travail élémentaire Fdx résultant d'une déformation infiniment petite, en remarquant qu'elle peut se décomposer en parallélogrammes élémentaires ou rectangles équivalents tels que $abcd$ dont la hauteur est $d\Phi$ et la base horizontale :

$$ab = \Phi \times d \tan \gamma = \frac{\Phi}{4\pi} \frac{d\mathcal{R}}{dx} dx,$$

γ étant l'angle de O_1a avec la verticale et la dérivée de la réluctance totale $\mathcal{R}$ du circuit magnétique étant prise à flux constant, puisque l'on passe de a en b par une déformation à flux constant.

L'expression du travail élémentaire est donc :

$$Fdv = \frac{1}{4\pi} dx \int_0^{\Phi_2} \Phi \frac{d\mathcal{R}}{dx} d\Phi,$$

d'où

$$F = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\Phi_2} \Phi \frac{d\mathcal{R}}{dx} d\Phi, \quad 9)$$

Φ_2 étant le flux qui existe dans le système à l'instant considéré (1):

Sous réserve de faire les mêmes hypothèses que pour intégrer la formule 6) de M. Liénard, c'est-à-dire d'admettre que la caractéristique partielle de l'élément de circuit magnétique introduit dans la déformation élémentaire est une droite, il est facile d'intégrer cette équation.

En effet, l'aire $ASO_1S'A_1$ est égale à l'aire du triangle $ADO_1D'A'_1$ et il est aisé de voir, d'après cela, que $\frac{d\mathcal{R}}{dx}$ garde la même valeur quel que soit Φ puisque $ab = a'b'$, ce qui permet d'intégrer :

$$F = \frac{1}{8\pi} \Phi_2^2 \left(\frac{d\mathcal{R}}{dx} \right)_A. \quad 10)$$

la dérivée étant toujours prise à flux constant (2).

La caractéristique du circuit magnétique peut être absolument quelconque et il suffit de regarder la figure 20 pour se rendre compte que l'on a encore le droit d'établir cette formule en prenant une origine quelconque à partir de laquelle on définira la réluctance ; $\frac{d\mathcal{R}}{dx}$ gardera toujours la même valeur.

C'est pour cette raison que cette formule et celles qui s'en déduisent ont toujours été présentées par leurs auteurs comme encore valables quand il y a de l'hystérésis sans qu'il soit besoin de faire aucune hypothèse sur la façon de définir la réluctance totale.

Il en résulte aussi que la décomposition du circuit magnétique en partie indéformable et partie déformable est encore valable.

(1) Pour cette formule, ainsi que pour les formules 10) et 10') qui s'en déduisent, il y aurait lieu de mettre le signe — devant. Comme en général il n'y a aucune ambiguïté sur le sens de l'attraction, on se contente d'en donner la valeur absolue.

(2) Cette formule a été entrevue par M. Guénée en 1900 (*Bulletin de la S. I. E.*, 1^{re} série, t. XVII, page 463) qui l'a donnée, après corrections faites de quelques erreurs, sous la forme :

$$F = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi n l}{\mathcal{R}} \right)^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx}.$$

Si l'on appelle $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ les ré reluctances respectives de ces deux parties, on a :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2,$$

et :

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x},$$

car il est bien évident qu'à flux constant la déformation n'a aucune influence sur la ré reluctance de la partie indéformable quelle que soit sa caractéristique.

Cette dernière égalité, montre d'une autre façon, l'indépendance de $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}$ à l'égard de Φ si la ré reluctance de l'entrefer est constante.

Finalement, l'expression de l'attraction devient :



Fig. 21.

$$F = \frac{1}{8\pi} \Phi_2^2 \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x} \quad (10')$$

formule donnée par M. Lehmann en 1919 $\mathcal{R}_2$ où figure la ré reluctance de l'entrefer seul (1).

Cette formule est plus particulièrement apte que la formule 7') à la détermination de la loi de l'attraction en fonction de l'entrefer à ampères-tours constants. Cette dernière formule a, en effet, le gros inconvénient de prendre une forme illusoire pour l'entrefer nul, ce qui n'est pas sans gêner beaucoup les calculs.

La détermination du flux agissant et pour une valeur de x et pour une caractéristique de la partie indéformable données se fait par la même construction que celle effectuée sur la figure 19. On prendra comme longueur représentant ce flux Aa ou $A'a'$ suivant la caractéristique adoptée. Les efforts, dans les deux cas, seront comme le carré du rapport de ces deux quantités.

On peut appliquer la formule 10') au cas simple d'un entrefer borné par deux plans parallèles en regard de surface S et distants de x (fig. 21).

Si x est *petit*, même *très petit*, par rapport à la grandeur des pièces polaires en regard, on peut admettre que l'entrefer garde tout du long cette section S ; autrement dit, qu'il n'y a pas épanouissement du flux et que cela *reste ainsi* même s'il y a une légère variation de x .

La ré reluctance de cet entrefer étant $\mathcal{R} = \frac{x}{S}$ la force qui tend à rap-

(1) Th. LEHMANN. Calcul de l'attraction magnétique dans les machines dynamo-électriques lorsque la loi de Maxwell devient insuffisante. R.G.E. T. VI, pages 754 et 802.

M. Lehmann donne cette formule à la suite de l'intégration de :

$$F = \frac{1}{\pi} \int_0^\Phi \Phi_2 \Phi \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x} d\Phi,$$

faite en supposant $\frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x}$ constant. Cette formule suppose qu'en toute rigueur on ait $\frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial x}$ nul, alors qu'il n'est que pratiquement négligeable, car il y a toujours une petite déformation des lignes de force dans les pièces voisines de l'entrefer lorsque le flux varie, mais dont l'influence devient rapidement négligeable dès que la partie indéformable est importante. Cette formule n'est donc qu'une formule pratique qu'il nous paraît inutile de mettre sous forme intégrale pour lui donner plus de rigueur. La substitution de $\frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x}$ à $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}$ ne doit être faite qu'après l'intégration.

procher les deux pièces polaires est donnée par :

$$F = \frac{\Phi^2}{8\pi} \times \frac{1}{S},$$

puisque S est constant.

De plus, l'induction dans l'entrefer est constante et égale à $\frac{\Phi}{S}$ de sorte que, l'attraction peut encore être mise sous la forme :

$$F = \frac{\mathcal{B}^2 S}{8\pi},$$

formule fondamentale donnée par Maxwell et qui a été, pendant de longues années durant le siècle dernier, la seule formule utilisée pour les électro-aimants. Elle a été employée à tort et à travers ; il ne faut rien lui demander en dehors de la vraisemblance de l'hypothèse faite au sujet de la section et qui n'a lieu que si l'entrefer est très petit (1). Par conséquent la formule de Maxwell ne doit donner que la force au « collage » et aussitôt après, et encore faut-il que les surfaces en présence soient bien dressées et s'arrachent bien *normalement*.

Nous verrons plus loin que, vérifiée expérimentalement dans ces conditions, elle convient parfaitement, mais s'écarte de la réalité dès que l'entrefer n'est plus très petit (2).

Si nous revenons maintenant à l'application des formules 7) et 10) à la totalité du circuit magnétique, il faut remarquer que $\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}\right)_A$ varie avec la position du point A sur la caractéristique totale, c'est-à-dire en fonction des ampères-tours, tandis que $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}$ garde théoriquement la même valeur quel que soit le flux. Pour cette raison et celle exposée plus haut, l'emploi des formules 10) et 10') en fonction du flux est le plus commode et le plus recommandable.

Enfin, nous pouvons encore signaler en passant que la vérification expérimentale de ces formules entraîne la nécessité, pour les deux caractéris-

(1) Si l'induction n'est pas constante en passant d'un point à un autre, on peut considérer l'effort qui s'exerce sur un élément de surface dS et faire la somme étendue à toute la surface :

$$F = \frac{1}{8\pi} \int_s \mathcal{B}^2 dS,$$

en supposant que l'induction et les forces élémentaires aient partout la même direction.

M. Lehmann a donné une extension de cette formule (R.G.E., t. XVI, page 51). Si l'on considère une surface S quelconque et que l'on suppose qu'en un point déterminé l'induction $\mathcal{B}$ fasse l'angle α avec la normale N , l'effort en ce point sera dans le plan

de N et $\mathcal{B}$ et fera avec N l'angle 2α . Sa valeur sera $dF = \frac{\mathcal{B}^2}{8\pi} dS$. Si l'on

représente vectoriellement cette quantité par $\frac{\overline{\mathcal{B}_{2\alpha}^2}}{8\pi} dS$, l'effort pour toute la surface sera :

$$F = \frac{1}{8\pi} \int_s \overline{\mathcal{B}_{2\alpha}^2} dS.$$

Dans le même article, M. Lehmann montre l'identité de cette formule avec $\frac{\Phi^2}{8\pi} \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x}$.

(2) Citons BOSANQUET, R. THRELFALL et F. MARTIN et F. TAYLOR JONES. Voir § 22.



tiques totales d'un circuit magnétique avant et après une déformation élémentaire, de se couper sur l'axe des ampères-tours, comme nous l'avons montré au § 10 pour une déformation finie, propriété qui entraînât notre interprétation de l'hystérésis.

19. — *Application des formules de l'attraction dans le cas d'un circuit magnétique présentant des fuites.* — Nous avons supposé, jusqu'à présent, que le circuit magnétique envisagé ne comportait pas de fuites, c'est-à-dire que le flux y était partout le même. L'introduction des fuites dans le calcul de l'effort conduit aux mêmes formules 7) et 10) que précédemment ; il n'y a donc rien de changé de ce fait.

Cette proposition est presque évidente si nous rappelons que les formules de l'attraction s'appliquent à la partie déformable des électro-aimants, parce que l'attraction est un phénomène purement local qui réside dans cette partie. On doit donc pouvoir appliquer ces formules à cette partie en se désintéressant du reste du circuit magnétique et de ses fuites s'il en a. Malgré ce raisonnement, le problème a besoin d'être examiné de plus près, surtout si la perméance de fuites varie avec le flux (1). C'est M. Lehmann qui a, le premier, soulevé nettement et traité ce problème (2).

Nous le traiterons nous-mêmes au moyen d'une autre méthode qui résulte de l'interprétation de l'étude expérimentale des fuites.

Nous partirons du fait que les formules 1), 6), 9), qui s'appliquent à la totalité du circuit magnétique sont valables, qu'il y ait des fuites ou non, du moment que l'on englobe les fuites dans ce circuit pour le rendre parfait, comme nous l'avons dit relativement à ce sujet dans le § 4 ; en d'autres termes : si l'on démontre ces formules en raisonnant sur les caractéristiques totales principales.

Dans le chapitre précédent, nous avons dit aussi que l'on pouvait, tout au moins en première approximation, considérer les lignes de fuites comme étant concentrées en un seul tube de force tendu entre deux centres d'application et dont la perméance $\mathcal{R}'_2$ ou la réluctance $\mathcal{R}'_2 = \frac{1}{\mathcal{R}'_2}$ dépend du choix de ces centres. Nous supposerons que ces centres sont au voisinage des limites de la partie indéformable (3) de sorte que le flux

(1) Aucun des auteurs des formules précitées, sauf bien entendu M. Lehmann, ne se sont préoccupés de cette question ; peut-être en vertu d'un raisonnement analogue au nôtre ou bien, plutôt, parce que la réalité donnait des résultats voisins de la théorie sans s'inquiéter des fuites, ce qui masquait le problème.

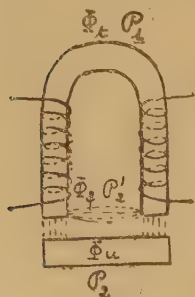
(2) Th. LEHMANN. Calcul de l'attraction magnétique dans les machines dynamo-électriques lorsque la loi de Maxwell devient insuffisante. *R. G. E.* T. VI, pages 754 et 802.

Dans cet article, il ne nous semble pas qu'il y ait à faire intervenir le coefficient de réduction c .

Calcul de l'attraction magnétique à l'aide d'un spectre. *R. G. E.* T. XVI, pages 51 et 99.

Dans ce dernier article, M. Lehmann montre que sa formule est indépendante de la variation possible de la perméance de fuites en faisant remarquer que dans sa démonstration, il n'y a pas lieu de la supposer constante.

(3) Il en est ainsi dans le cas d'un électro-aimant à entrefer unique (déformable). Dans le cas d'un électro à deux entrefers, précisément celui de notre appareil d'études, ce ne sont que les limites de la partie fixe ; le flux utile Φ_u est le même dans les entrefers et l'armature mobile.



tielle de l'élément de circuit magnétique introduit dans la partie déformable *seule* est rectiligne, la caractéristique élémentaire principale formée par la différence horizontale des abscisses des caractéristiques totales principales avant et après la déformation est une droite.

Pour avoir cette caractéristique élémentaire principale, construite en fonction du flux total, il faut ajouter verticalement aux ordonnées de la caractéristique de l'élément intercalé, faite en fonction du flux Φ_u , les ordonnées d'un segment de la caractéristique des fuites qui est la droite $\Phi_f = 4\pi ni\mathcal{R}'_2$.

Les deux composantes étant rectilignes, la caractéristique élémentaire principale doit être rectiligne. Nous pouvons faire, alors, une construction graphique analogue à celle de la figure 16 (fig. 22).

Soient OSA et OS'A₁ les caractéristiques totales principales, c'est-à-dire construites en fonction du flux total avant et après la déformation élémentaire. Nous savons que l'on peut les remplacer par les droites ODA et OD'A₁ dans le but d'intégrer les équations 6) et 9). Le résultat est immédiat, par analogie avec ce que nous avons fait précédemment :

$$F = 2\pi(nl_s)^2 \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \right)_A, \quad 7)$$

et :

$$F = \frac{\Phi_i^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \right)_A \quad 10),$$

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}$ étant la perméance et la réluctance *totales* du circuit magnétique et les dérivées partielles étant prises à *flux total constant*.

La caractéristique de fuites étant la droite OF, nous pouvons avoir la caractéristique totale en fonction du flux utile seulement en retranchant verticalement les ordonnées de OSA et de OF. Soit OSB. Après déformation nous aurons OS'B₁ et B₁ devra se trouver sur la droite CB₁ symétrique de OF.

Il est facile de voir que l'aire B'BSOS'B₁ est équivalente à A₁ASO S'A₁ puisqu'il y a eu translation verticale des éléments de surface. Cette aire représente donc encore le travail de l'attraction pendant la déformation, mais il faut remarquer que le flux utile, c'est-à-dire le flux dans la partie qui a subi la déformation, *n'est plus constant* ; il est passé de aB à a_1B_1 . De plus, les deux caractéristiques OSB et OS'B₁ se déduisent points à points l'une de l'autre *obliquement* selon la direction BB₁.

Si nous faisons la même construction en partant des droites ODA et OD'A₁ c'est-à-dire en supposant la perméabilité constante, ce que l'on peut faire puisqu'il n'y a aucune variation de flux dans toute la partie indéformable, l'aire B₁BDOD'B₁ est égale à A₁ADOD'A₁ par suite de l'égalité de AA'' et de BB'' venant de ce que les sommets des triangles A₁ et B₁ sont sur la même verticale.

Or, cette fois, la différence *horizontale* des caractéristiques rectilignes ODB et OD'B₁ faites en fonction du flux utile est une droite et représente

Nous pouvons, alors, *enlever*, par la pensée, sans créer aucune perturbation (1) puisque c'est le flux total constant qui y passe, un tronçon de la partie indéformable absorbant précisément les ampères-tours OO_V et traiter, avec le *restant* du circuit magnétique, le problème rigoureusement comme nous l'avons fait dans le cas précédent. La figure 23 montre clairement comment, en rapportant toutes les caractéristiques à l'origine O_V , on détermine la caractéristique OE_1 de l'élément introduit dans la partie déformable (2).

L'intégration des formules 6) et 9), étendue à la totalité de la région conservée et, par suite, à la totalité du circuit magnétique est donc toujours possible et identique au résultat de l'application des formules 7') et 10') au tronçon parcouru par le flux utile seul.

On retrouverait le même résultat en considérant le tronçon de circuit magnétique qui s'étend entre les deux centres d'application des fuites et qui comprend en parallèle la partie déformable et les fuites. On a le droit de le considérer ainsi comme faisant partie d'un circuit magnétique parfait. Nous savons que, dans ce cas, on peut appliquer les formules 7') et 10') qui deviennent en appelant $\mathcal{R}_2^1$ et $\mathcal{T}_2^1$ les réluctance et perméance de ce tronçon :

$$F = 2\pi(nI)^2_{\text{eff.}} \frac{d\mathcal{T}_2^1}{dx},$$

et :

$$F = \frac{\Phi_t^2}{8\pi} \frac{d\mathcal{R}_2^1}{dx}.$$

Or, on a :

$$\mathcal{T}_2^1 = \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}'_2,$$

$$\mathcal{R}_2^1 = \frac{\mathcal{R}'_2 \mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}'_2}.$$

Si nous dérivons ces expressions à flux total constant en remarquant que $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{T}_2$ sont constants ($d\mathcal{R}_2 = 0$ et $d\mathcal{T}_2 = 0$) il vient bien :

$$F = 2\pi(nI)^2_{\text{eff.}} \frac{d\mathcal{T}'_2}{dx}, \quad 7')$$

et

$$F = \frac{\Phi_u^2}{8\pi} \frac{d\mathcal{R}_2}{dx}. \quad 10')$$

Si la partie parcourue par le flux utile seul ne contient pas de fer, les $\frac{d\mathcal{T}_2}{dx}$ et $\frac{d\mathcal{R}_2}{dx}$ que nous avons prises à flux total constant sont égales à celles prises à flux utile constant. C'est sous ce *dernier aspect qu'il faut les considérer* dans les formules 7') et 10'), en vertu même de ce que nous avons dit tout au début du paragraphe, à savoir que les formules 7') et

(1) On peut supposer qu'on a comblé le vide par une matière infiniment perméable, ce qui respecte la forme et la disposition des parties conservées.

(2) Cette construction est toujours valable dans le cas d'une déformation finie.

10') devaient s'appliquer à la partie déformable *seule* sans s'inquiéter du reste du circuit magnétique.

Expérimentalement, lorsque l'on relève la caractéristique du flux utile dans une déformation à flux total constant, courbe symétrique de la caractéristique totale des fuites, on obtient bien une droite BB'_1 (fig. 23) dont le prolongement ne passe pas par le point C — ou par l'origine dans le cas de la caractéristique des fuites. Nous avons donné le nom de *région ou zone inactive* à la région de la culasse opposée à l'entrefer absorbant les ampères-tours OO_v qui joue réellement le même rôle que la partie indéformable de notre cas idéal précédent. L'expérience montre, en effet, que dans une déformation à flux total constant la distribution des flux ne varie sensiblement pas sur la presque totalité de cette région. Il n'y a pas *modification des fuites*, ce qui ne veut pas dire qu'elles soient totalement absentes ; il n'y a modification des fuites que dans la *région active*, complément de la région inactive.

A flux total variable et x constant, la caractéristique des fuites est une courbe presque rectiligne passant par O. Nous avons donné le nom d'*origine virtuelle* (1) au point O_v à cause de la sorte de réfraction qui a lieu en F et en B.

L'expérience montre que l'étendue de la région inactive varie assez peu en fonction du flux et de l'excitation.

Si nous nous plaçons, dans le cas déjà vu, où l'on chemine, d'une part sur une branche d'un cycle d'hystérésis et, d'autre part, sur le lieu du sommet des cycles, puisque la région inactive reste sensiblement la même, les origines virtuelles O_v et O'_v doivent respectivement partager dans un rapport voisin les segments Oa et O_1a . Autrement dit, la caractéristique du flux utile à flux total constant sera dans un cas BC_v et dans l'autre BC'_v ; la réfraction n'est pas sensiblement changée (fig. 24 (2)).

Nous croyons voir là la vérification physique la plus probante de notre interprétation de l'hystérésis par changement d'origine des ampères-tours.

Dans un aimant, la zone inactive est beaucoup plus grande que dans un électro-aimant semblable, travaillant dans les mêmes conditions de flux.

Remarques. — 1° Dans ce qui précède, nous avons supposé implicitement qu'il n'y avait pas de fer dans la région traversée par le flux utile seul, c'est-à-dire qu'il n'y avait qu'un entrefer. Dans le cas d'un appareil à deux entrefers, comme celui qui nous a servi, l'armature immobile est traversée par le flux utile. Or dans une déformation à flux *total* constant, nous avons vu, qu'à cause des fuites, le flux utile ne reste pas constant, aussi pourrait-on craindre qu'il s'introduisît de ce fait une erreur.

(1) O_v est l'image virtuelle du point O. Il y a en effet une sorte de réfraction de toute la figure à travers la ligne Aa en passant des caractéristiques à flux variable et entrefer fixe aux caractéristiques à flux total constant et entrefer variable.

(2) Cette dernière remarque établie, il devient possible de traiter en toute rigueur la deuxième partie du problème du § 17 (voir notes 1, page 37, et 2, page 38).

de proche en proche, on arrive de la sorte jusqu'à l'entrefer dont la dérivée de la perméance est la même qu'elle soit prise à flux total ou flux utile constant, et cela quelle que soit la façon dont on a groupé les lignes de fuites. Il est donc permis de les grouper en un seul tube dont les extrémités sont au voisinage d'un entrefer unique.

Si la perméabilité du fer n'est plus constante, mais si la caractéristique du flux en fonction du champ est rectiligne entre les points A et B (fig. 25) correspondant au flux total et au flux utile, entre lesquels s'intercalent les flux de toutes les régions du fer du circuit magnétique, tout ce que nous venons de dire demeure exact. En effet, dans une déformation à flux total constant, la même variation de flux produit en chaque point la même variation d'ampères-tours et nous nous retrouvons donc dans le même cas que si la perméabilité était restée constante. Au fond, nous n'avons qu'à considérer la perméabilité instantanée (définie par $\mu_i = \frac{d\mathcal{B}}{d\mathcal{H}}$ et représentée par l'inclinaison de la tangente à la courbe de magnétisme) puisque nous ne nous déplaçons en chaque point de la courbe que très peu par rapport à ce point.

Enfin, si la caractéristique précédente n'est plus rectiligne dans la zone A'B' utilisée, il y a lieu de faire une correction dans l'expression de $\frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial x}$ prise à flux total constant, pour l'amener à être égale à celle prise à flux utile constant. En effet, la concentration des fuites en un tube unique, nécessaire pour l'établissement des formules, suppose que le fer en chaque point possède la même perméabilité instantanée que la région parcourue par le flux total correspondant au point A'. Or, en réalité, en un point quelconque C cette perméabilité est différente. Si l'on mène en A' la parallèle à la tangente en C, dans une déformation à flux total constant la variation d'ampères-tours dans la région correspondante à C est représentée par cd , alors qu'on la suppose être ad . Il faudra donc, dans le relevé des courbes à flux total constant, majorer la variation des ampères-tours relatifs à cette région dans le rapport $\frac{ad}{cd}$: opération qui doit être étendue à tout le fer du circuit magnétique. En pratique il suffira d'évaluer ce rapport pour un point moyen et de faire porter la majoration sur la variation totale d'excitation.

Il résulte de cela que les formules 7') et 10') sont les seules véritablement exactes dans le cas réel, alors que les formules 7) et 10) doivent subir une correction d'ailleurs variable avec la forme des courbes suivies.

Cette remarque un peu compliquée est cependant nécessaire pour expliquer certaines anomalies que nous avons enregistrées dans nos expériences venant de l'application brutale des formules 7) et 10).

3° Il existe une généralisation de la formule de Vaschy (1) signalée anté-

(1) Voir VASCHY, *Théorie de l'Electricité*, page 252 et BETHENOD, Sur l'expression des forces mutuelles, dans les systèmes électriques, *Lumière électrique*, 2^e série, T. XXIV, pag 71.

rieurement par Neumann en 1847 (1) qui présente un intérêt spéculatif et qu'il est utile de rappeler à cause des erreurs d'interprétation que l'on pourrait commettre à son sujet.

Si nous considérons un électro-aimant ayant deux excitations indépendantes de n_1 et n_2 spires parcourues par les courants I_1 et I_2 , l'attraction est donnée par :

$$F = 2\pi(n_1 I_1 + n_2 I_2)^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = 2\pi(n_1^2 I_1^2 + 2n_1 n_2 I_1 I_2 + n_2^2 I_2^2) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x},$$

$\mathcal{E}$ étant la perméance de la totalité de la région parcourue par le flux commun aux deux enroulements, y compris les fuites *communes*. Or on a, si l'on appelle L_1 le coefficient de self-induction du premier enroulement, le deuxième étant inutilisé :

$$L_1 = 4\pi n_1^2 (\mathcal{E} + \mathcal{E}'),$$

$\mathcal{E}'$ étant une perméance de fuites supposée *constante* par rapport à x qu'il y a lieu d'ajouter à $\mathcal{E}$ pour tenir compte des fuites *propres* de cet enroulement. On a donc, puisque $d\mathcal{E}' = 0$:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = 4\pi n_1^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}.$$

De même pour le deuxième enroulement :

$$\frac{\partial L_2}{\partial x} = 4\pi n_2^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 4\pi n_1 n_2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x},$$

M étant le coefficient d'induction mutuelle des deux enroulements. Il en résulte que

$$F = \frac{1}{2} I_1^2 \frac{\partial L_1}{\partial x} + I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{2} I_2^2 \frac{\partial L_2}{\partial x};$$

formule établie par Vaschy dans le cas où la perméabilité est constante et qui se trouve ainsi être identique aux formules 7) et 10) ; elle s'étend à un nombre quelconque d'excitations indépendantes.

Si nous considérons le cas où L_1 et L_2 sont constants, il reste :

$$F = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial x}$$

qui est l'équation bien connue du wattmètre électrodynamique où les enroulements ont bien en effet une self-induction constante. Le système des deux bobines forme un circuit magnétique déformable, sans fer, qui relève des formules de l'électro-aimant.

C'est encore l'expression qui peut donner le couple d'un moteur électrique à courant continu qui devient un électro-aimant où l'inducteur et l'induit ont une self-induction constante pour toutes les positions de ce dernier.

(1) NEUMANN, *Poggendorf Annalen*. T. LXVII, 1847.

Or, nous remarquerons, d'après ce que nous avons vu précédemment (§ 17) que :

$$ADOD'A''A = \frac{1}{2} Oa.AA'' = \frac{1}{2} (nl)^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x},$$

$$ACC'A'A = Oa.AA' = (nl)^2 \frac{d\mathcal{E}}{dx},$$

D'où :

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}}{\frac{d\mathcal{E}}{dx}} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta},$$

en appelant toujours α l'angle de ODA avec l'horizontale et β celui de la tangente en A à la caractéristique totale du circuit magnétique.

Si le circuit magnétique n'est pas saturé, la caractéristique OSA est rectiligne, d'où $\alpha = \beta$. Le rendement instantané est donc, dans ce cas, de $\frac{1}{2}$ comme l'a signalé M. Picou.

Si, maintenant, nous avons $\alpha > \beta$, pour que le rendement instantané soit inférieur à l'unité, il faudrait avoir $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} < 2$. Or, il ne nous semble pas que les courbes de magnétisme soient des courbes telles que chaque point jouisse forcément de cette propriété. Le rendement instantané peut donc devenir supérieur à 1. La considération de ce rendement n'a donc aucune valeur.

Si nous ne considérons plus une déformation élémentaire, mais une déformation finie entre les valeurs $x = x_0$ correspondant à la caractéristique aA'_1 de la partie déformable, et $x = 0$, le raisonnement précédent fait sur la figure est encore vrai et permet d'écrire :

$$\rho = \frac{ASOS'A'A}{ACC'A'A},$$

qui, somme toute, n'est qu'une valeur moyenne du rendement instantané et qui peut donc, pour de fortes saturations, devenir supérieur à l'unité.

Nous voyons nettement maintenant qu'il faut, pour établir l'expression du rendement d'un électro-aimant, faire le bilan des énergies électriques et mécaniques depuis la mise sous tension jusqu'à l'instant actuel.

Pour amener le système dans l'état figuré par le point A' (fig. 26) correspondant à l'instant où le système va commencer son travail mécanique, il faut dépenser l'énergie représentée par l'aire A'C'OS'A'A qu'il convient d'ajouter à ACC'A'A fournie pendant le déplacement de l'armature. Le rendement devient donc :

$$\rho_1 = \frac{ASOS'A'A}{ACOS'A'A}.$$

À la fin du déplacement, il reste, emmagasinée dans le système, l'énergie

correspondant à l'aire ACOSA ; cette énergie se trouve dépensée en pure perte dans l'étincelle de rupture ou dans une résistance de décharge lorsque l'on coupe l'excitation.

Ainsi donc, le rendement théorique qui correspond à l'utilisation industrielle de l'électro-aimant est bien celui que nous venons d'indiquer ; mais si, par un moyen quelconque, l'on pouvait récupérer cette énergie on aurait, dans ce cas, le rendement unité comme il était facile de s'y attendre $\left(\frac{ASOS'A'A}{ASOS'A'A} \right)$.

C'est donc, uniquement, l'énergie perdue dans l'étincelle de rupture

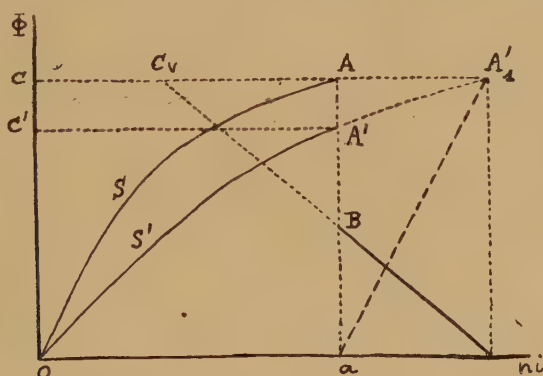


Fig. 27.

qui fait que le rendement industriel théorique est inférieur à l'unité. La transformation de l'énergie électromagnétique en énergie mécanique ou, vice versa, est une transformation sans déperdition, c'est une transformation noble de l'énergie.

Si l'on suppose que l'armature est venue depuis l'infini (le point A' est alors sur l'horizontale en a) jusqu'à l'entrefer O, le rendement théorique industriel est :

$$\rho_1 = \frac{ASOaA}{ACOaA},$$

qui est égal à $\frac{1}{2}$ si le circuit magnétique n'est pas saturé et supérieur à $\frac{1}{2}$ en cas de saturation.

Si le circuit magnétique présente des fuites, on applique la construction donnée précédemment pour avoir les caractéristiques aA_1 et OSA' . La figure 27 montre, en particulier, la construction de OSA' pour x infini (caractéristique de la partie déformable horizontale) en admettant l'existence d'une origine virtuelle dont le symétrique est C_v .

Le rôle des fuites est de diminuer le rendement théorique industriel en augmentant l'énergie emmagasinée inutilement dans le système.

L'introduction de l'hystérésis ne va pas compliquer beaucoup le pro-

blème (fig. 28). Le rendement industriel théorique est en négligeant l'énergie perdue dans un cycle secondaire :

$$\rho_1 = \frac{ASO_1S'A'A}{ACD'S'A'A + DO_1D'D}$$

A l'énergie fournie par la source, représentée par l'aire $ACD'S'A'A$, il convient d'ajouter l'énergie figurée par $DO_1D'D$ qui est empruntée à l'énergie que possédait initialement le circuit magnétique du fait qu'il était déjà aimanté. Cette énergie se trouve récupérée à circuit ouvert lorsque l'armature revient dans sa position de départ, par suite de l'effort qu'il faut lui communiquer pour vaincre l'attraction due au rémanent.

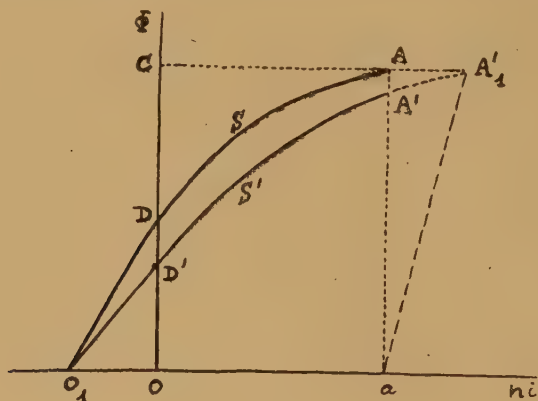


Fig. 28.

Ainsi, l'hystérésis a pour effet d'augmenter le rendement du système en diminuant l'étincelle de rupture et de freiner le retour de l'armature, ce qui peut ne pas être gênant.

Si, maintenant, nous considérons le cas de l'aimant, cas où il n'y a pas de source (1), toute l'énergie mécanique se trouve empruntée à l'énergie emmagasinée dans le fer lui-même à l'état de magnétisme rémanent et dans le milieu extérieur. Si nous négligeons l'énergie perdue dans la description des cycles secondaires, il peut y avoir indéfiniment échange entre les énergies mécanique et électrique. Le rendement, dans ce cas, est théoriquement l'unité.

Ainsi l'aimant créé aux dépens d'un travail bien supérieur à celui qu'il a emmagasiné est assimilable, avec son armature, à un ressort qui, une fois construit, peut être bandé et détendu indéfiniment.

(1) Dans ce cas, le rendement instantané est infini.

CHAPITRE III

APPAREIL D'ÉTUDE ET MÉTHODES DE MESURES.

22. — *Exposé historique des expériences faites en vue de rechercher les lois de l'attraction de l'électro-aimant.* — Nous allons donner un exposé rapide, donc forcément incomplet, des expériences faites en vue de dégager les lois de l'attraction des électro-aimants.

Les premières, faites sans aucune idée directrice ou, en partant d'idées fausses, conduisent à des lois inexactes qui n'ont plus qu'un intérêt historique ; les secondes, faites en vue de la vérification de la formule de Maxwell, sont concluantes.

Les expériences quantitatives les plus anciennes semblent être celles de Fechner et datent de 1833 (1). Elles furent exécutées sur un électro-aimant en fer à cheval muni d'une armature et Fechner trouva un effort sensiblement proportionnel au courant.

Lenz et Jacobi, en 1839 (2) montrèrent l'inexactitude de cette loi ; Joule, la même année (3), montra que l'effort croît d'abord comme le carré de l'intensité du courant jusqu'à une certaine valeur, puis croît ensuite moins vite pour atteindre un maximum, résultats assez exacts en somme, sauf en ce qui concerne le maximum.

En 1852, Dub (4) trouva que la loi devait être comprise entre celle de Fechner et celle de Joule.

En 1870, Von Waltenhofen (5) fit des expériences en arrachant l'un de l'autre deux électro-aimants semi-circulaires formant un tore complètement bobiné. Il trouva une loi de la forme :

$$F = \frac{b}{\lg ac},$$

où c représente l'intensité du courant et a et b des constantes.

Verner Von Siemens, en 1881 (6) fit des expériences analogues avec les deux moitiés d'un cylindre coupé par un plan passant par l'axe. Il trouva une force portante proportionnelle au moment magnétique par unité de volume.

(1) FECHNER, *Schweigg Journal*, LXIX (1833). Cette référence et celles qui suivent sont extraites de l'*Eclairage électrique*. T. III, page 89.

(2) LENZ et JACOBI, *Poggendorff Annalen*, XLVII, page 415 (1839).

(3) JOULE, *Philosophical Magazine*. Décembre 1851.

(4) DUB, *Poggendorff Annalen*. LXXXVI, page 553 (1852).

(5) VON WALTENHOFEN, *Wien Berichte*. LXI, page 739 (1870).

(6) VON SIEMENS, *Wiedeman's Annalen*. XIV, page 648 (1881).

Wassmuth, en 1882 (1) reprenant les expériences de von Waltenhofen, trouva la loi :

$$F = a + bI^2 + \frac{cI^2}{d + eI^2},$$

I étant le moment magnétique par unité de volume. Adoptant les résultats de Siemens, il leur donna la forme :

$$F = a + bI^2 + cI^4.$$

Ces deux dernières expressions vérifient d'une façon approchée une formule donnée par Stefan en 1880 :

$$F = 2\pi J^2 S,$$

J étant l'intensité d'aimantation et S la surface de contact.

Cette formule que l'on oppose quelquefois à la formule de Maxwell parce qu'elle est en concordance avec elle pour les faibles inductions est inexacte. Elle provient d'une erreur de raisonnement faite en rapprochant l'électrostatique du magnétisme.

Nous pouvons encore citer les expériences de Dumoncel en 1880 (2) faites avec un électro-aimant en fer à cheval dont l'armature était reliée au fléau d'une balance, mais dont l'objet a été surtout de rechercher des caractéristiques du bobinage et les dimensions à donner pour produire le maximum d'effet au moyen d'une pile déterminée.

Nous arrivons, maintenant, à la vérification de la formule de Maxwell. Les trois séries d'expériences faites dans ce but et que nous allons décrire sont très sensiblement les mêmes.

Les premières mesures furent faites par Bosanquet en 1886 (3). L'expérience consistait à arracher l'un de l'autre deux barreaux de fer assez courts placés verticalement dans l'axe d'une hélice magnétisante (*fig. 29*).

L'arrachement se faisait en chargeant progressivement le barreau inférieur jusqu'à obtenir le décollement.

Les surfaces de contact étaient planes et aussi bien dressées que possible. Les résultats trouvés par Bosanquet sont les suivants :

1° Si l'induction dans l'entrefer est inférieure à 5.000 gauss, les efforts mesurés sont beaucoup plus grands que ceux donnés par la formule de Maxwell.

2° Cette formule n'est plus applicable lorsque l'entrefer devient appréciable. En dehors de cela, la formule de Maxwell se vérifie à 5 % près.

R. Threlfall assisté de F. Martin (4) reprirent ces expériences en 1894 en utilisant, toutefois, des barreaux un peu plus longs. Les essais furent faits avec des barreaux de différentes grandeurs et de différentes sections,

(1) WASSMUTH, *Wien Berichte*, LXXXV, page 337 (1882).

(2) DU MONCEL, Recherche sur les conditions de force des électro-aimants. *Lumière électrique*. T. III, pages 107 et 129. Vérification expérimentale des lois des électro-aimants, pages 292 et 307.

(3) BOSANQUET, *Philosophical Magazine*. T. XXII, page 535 (1886).

(4) R. THRELFALL et F. MARTIN. Sur une méthode approximative pour trouver les forces agissant dans les circuits magnétiques. *Philosophical Magazine*. T. XXXVII, pages 89-110, juillet 1894 et *Lumière électrique*. T. LIII, page 187.

ainsi que de différents degrés de poli, depuis la surface rugueuse jusqu'au poli optique.

Les forces d'arrachement étaient mesurées au moyen d'un peson à ressort convenablement installé pour que la force soit *rigoureusement* parallèle à l'axe des barreaux.

L'induction était mesurée à l'aide d'une bobine induite placée autour de l'entrefer et envoyant une décharge inductive dans un galvanomètre balistique à chaque établissement du courant. Ce galvanomètre était lui-même étalonné par la décharge produite en faisant faire demi-tour à une bobine connue dans le champ terrestre. La mesure de l'induction était faite dans les deux sens du courant pour éliminer l'hystérésis, méthode contestable.

Le résultat général est que la formule s'applique beaucoup mieux que



Fig. 29.

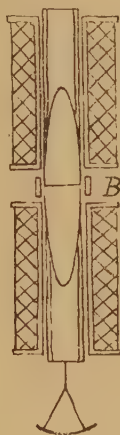


Fig. 30.

ne l'a trouvé Bosanquet pour les faibles inductions. La nature du fer, ainsi que le degré de poli des surfaces n'ont aucune influence sensible.

La principale cause d'erreur que signale Threlfall à propos des expériences de Bosanquet est l'arrachement plus ou moins rigoureusement normal des barreaux. Si la traction n'est pas rigoureusement parallèle à l'axe des cylindres, fait-il remarquer, ceux-ci se séparent d'un côté alors que l'autre côté est encore en contact. Il y a en ce point concentration de l'induction qui, si l'induction est faible, est capable de donner une force d'attraction très grande. Au contraire, si l'induction est assez élevée, cette concentration est beaucoup plus faible et l'influence en est peu sensible. Threlfall signale que pour 3.000 gauss, il a trouvé des forces variant dans le rapport de 1 à 3 suivant la perfection de l'arrachement.

Ces expériences furent encore reprises de 1893 à 95 par F. Taylor Jones avec beaucoup de précision (1).

(1) F. TAYLOR JONES, Sur la force électromagnétique ou force portante des électro-aimants. *Philosophical Magazine* T. XXXIX, pages 254-268, mars 1895 et *Eclairage électrique*. T. III, page 89.

Les éprouvettes de fer utilisées présentaient à elles deux la forme d'un ellipsoïde de révolution très allongé (*fig. 30*). Les surfaces de contact étaient parfaitement polies. Un anneau de cuivre B soudé à l'un des barreaux servait de guide afin d'avoir un arrachement bien normal. L'auteur remarque, également, que cela avait une grosse influence sur l'exactitude des mesures.

La force de décollement était mesurée en chargeant progressivement avec de la limaille un plateau disposé sous le barreau inférieur.

L'induction était mesurée d'une façon assez originale. On commençait par déterminer, au moyen d'un magnétomètre, l'intensité d'aimantation, en plaçant l'ellipsoïde et ses bobines d'excitation, supposées très longues, dans la direction est-ouest. $\mathcal{I}$ était calculé au moyen de la formule de Thomson et Tait (Voir l'article de l'Eclairage Electrique). L'induction était donnée par la formule $\mathcal{B} = \mathcal{H} + 4\pi\mathcal{I}$, $\mathcal{H}$ étant calculé en connaissant les caractéristiques des bobines d'excitation et la valeur du champ démagnétisant au centre de l'ellipsoïde donnée par la formule du § 438 du traité de Maxwell.

Les résultats furent très probants, quoique, au delà de 12.000 gauss, les points relevés fussent systématiquement très légèrement au-dessous de ceux calculés, de l'ordre de 1/2 à 1 0/0. Jones s'aperçut que cela venait de l'intervalle, existant entre les deux bobines d'excitation, nécessaire pour voir si les contacts étaient parfaits. En les rapprochant, il trouva encore une vérification plus rigoureuse; malheureusement, il ne put descendre au dessous de 6 000 gauss, le poids du barreau inférieur et du plateau s'y opposant.

La principale critique que nous adresserons à ces trois dernières séries d'expériences, malgré les résultats très probants auxquels elles aboutissent, est qu'elles ont été faites avec un circuit magnétique très ouvert, où le fer ne joue guère que le rôle de concentrer les lignes de force à l'endroit de la surface d'arrachement, de matérialiser en quelque sorte cette surface. Sont-elles encore valables lorsque le circuit magnétique est complètement fermé (1) et que l'action du fer, avec ses formes plus ou moins compliquées de caractéristiques, devient prépondérante? Doit-on craindre une réaction de la part du circuit, surtout quand il y a des fuites? De plus, la vérification de la formule de Maxwell ne s'étend qu'aux entrefers très petits et perd toute valeur lorsque l'entrefer a seulement quelques dixièmes de millimètres; ce qui concorde parfaitement avec les restrictions faites pour son établissement.

Des expériences furent faites avec un électro-plongeur industriel et de grands entrefers par K. Euler en 1911 (2) en traçant un spectre au moyen de mesures de flux en différents endroits et en appliquant, en chaque

(1) N'oublions pas qu'il existe (ou existât) une perméamètre ainsi constitué dont les résultats sont loin d'être encourageants.

(2) K. EULER. Calcul de la force portante d'un électro-aimant. *Electrische Kraftbetriebe und Bahnen*, 14 et 24 décembre 1911. *Lumière électrique*. 2^e série, t. XVIII, page 113.

point, la formule de Maxwell. Il trouva que les résultats sont acceptables pour les faibles intensités, mais que pour les fortes intensités la force mesurée est plus grande que la force calculée.

Ces expériences nous semblent très douteuses étant donnée la mesure, très sujette à caution, des flux (1) et les frottements qui existent toujours dans les électro-plongeurs. Il ne nous semble, du reste, pas que la formule de Maxwell soit suffisante, même appliquée en chaque point (2).

Le problème reste donc entier quant à la vérification des formules modernes de Pérot et Picou ou de Lehmann.

23. — *But et objet de nos recherches.* — Nous nous sommes donc proposé de vérifier l'exactitude des formules :

$$F = 2\pi(nI_s)^2 \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \right)_A,$$

ou :

$$F = \frac{1}{8\pi} \Phi_i^2 \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \right)_A,$$

sur un circuit magnétique présentant fuites et hystérésis dans les conditions *mêmes* de leur démonstration, c'est-à-dire en les considérant comme étendues à la *totalité* du circuit magnétique, y compris les fuites.

Nous avons déterminé les dérivées partielles prises à flux total constant qui figurent dans ces formules, au moyen des tangentes aux courbes de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{R}$ totales, relevées expérimentalement en faisant une déformation à flux total constant du circuit magnétique.

Le degré d'exactitude de ces formules que nous verrons être très grand pour tous les entrefers, sauf, peut-être, pour le collage sur lequel nous n'osons pas nous prononcer, justifie pleinement l'hypothèse faite par M. Pérot relativement à leur intégration.

L'indépendance de la forme de la caractéristique suivie se trouve instantanément vérifiée si nous faisons remarquer que les courbes de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{R}$ ont été relevées en mesurant les flux par inversion totale de l'excitation, ce qui nous force à raisonner avec les caractéristiques lieux des sommets des cycles d'hystérésis, alors que dans la mesure directe des forces, le système suit naturellement une branche d'un cycle d'hystérésis.

Nous nous sommes proposé, ensuite, de vérifier entre autres l'exactitude de nos constructions graphiques et de nos vues sur l'hystérésis en comparant le fonctionnement en aimant avec celui en électro-aimant, dans les mêmes conditions de flux et d'entrefer.

Ces quelques détails vont nous permettre de justifier le choix de notre appareil d'études.

24. — *Choix et description de notre appareil.* — Nous avons éliminé, *a priori*, le type d'électro-aimant dit plongeur ou cuirassé pour les deux

(1) Les flux étaient en effet évalués en planimétrant l'aire de la courbe d'établissement de la force électromotrice dans une bobine induite en fonction du temps, courbe relevée par points au moyen des lectures d'un voltmètre sensible.

(2) Voir LEHMANN, *R.G.E.* T. XVI, page 51 (remarque 1 de la page 33).

motifs suivants, malgré la constance de leur effort en fonction de la course qui aurait pu simplifier par ailleurs nos mesures :

1° La mesure du flux utile est extrêmement difficile, sinon impossible, ce flux étant mal délimité, l'entrefer subissant une déformation s'étendant bien au delà de l'entrefer « géométrique » que l'on considère ordinairement. Le flux total, lui-même, n'est pas très bien défini.

2° Il y a toujours des frottements dûs aux désaxements de l'armature mobile qui, s'ils sont pratiquement évités par une chemise de guidage non magnétique ou par un ajustement « gras », sont néanmoins gênants dans un appareil d'étude parce que non constants ou mal définis. Le désaxement crée, en effet, une variation de réluctance du joint qui attire l'armature perpendiculairement au déplacement prévu.

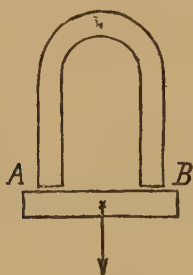


Fig. 31.

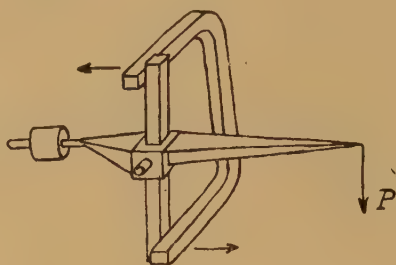


Fig. 32.

Nous avons donc adopté l'électro-aimant en fer à cheval ou, plus exactement en U, fermé par une armature rectiligne où le flux utile est parfaitement défini au milieu par raison de symétrie quelle que soit l'étendue des lignes de force à travers l'air. Tous les tubes de force allant de la partie fixe à la partie mobile doivent être, en effet, considérés comme appartenant au flux utile, car ils subissent tous une modification dans un déplacement de l'armature. Beaucoup d'auteurs disent qu'il ne faut pas tenir compte des tubes de force qui entrent normalement au déplacement ; nous ne sommes pas de cet avis.

Avec ce système se présente — même d'une façon amplifiée si l'on n'y prend garde, — la difficulté signalée plus haut relativement à l'arrachement bien normal de l'armature. On peut s'en rendre compte par le raisonnement suivant, en considérant l'électro-aimant représenté par la figure 31.

Admettons que la loi de Maxwell soit applicable ; lorsque le décollement a lieu bien simultanément en A et en B la force mesurée est $2 \frac{\mathcal{B}^2 S}{8\pi}$, si S est la surface de contact d'un côté seulement. Si, au contraire, le décollement n'a lieu qu'en A on peut admettre qu'il n'y a pas encore eu de déplacement sensible en B, donc analogie avec une charnière. La force nécessaire pour rompre l'équilibre n'est donc seulement que $\frac{\mathcal{B}^2 S}{8\pi}$, c'est-

à-dire la moitié ; mais si nous appliquons la force antagoniste au milieu de l'armature, il est facile de voir qu'elle sera la même dans les deux cas, à cause du couple.

Nous voyons donc immédiatement l'avantage qu'il y a à avoir un appareil où l'attraction se traduit *uniquement par un couple*. A cet effet, comme le montre la figure 32, l'armature a été placée verticalement et symétriquement entre les branches de l'U, les deux forces d'attraction étant opposées et donnant lieu à un couple équilibré au moyen du poids P, placé à l'extrémité du fléau d'une balance solidaire de cette armature.

• Le circuit magnétique a été réalisé en acier doux, matière franchement

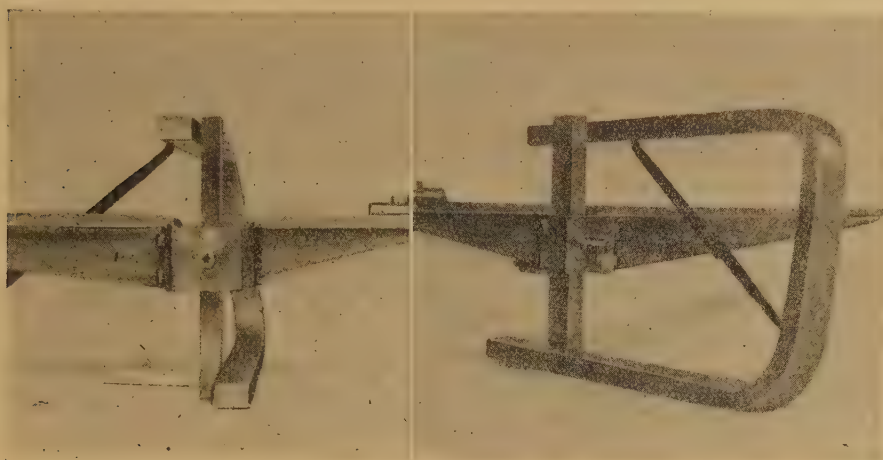


Fig. 33.

hystérétique, de façon à pouvoir étudier le fonctionnement en électro-aimant avec une caractéristique ne passant pas par l'origine et le fonctionnement en aimant. Le fer à cheval a été forgé à la forme voulue, légèrement gauchi afin que l'armature soit parfaitement verticale lorsqu'elle est au contact (fig. 33). Ses dimensions sont de 284^{mm} de long et 168^{mm} de large ; le poids est de 1496^{gr}. La section moyenne est de 2^{cm²},9, sauf au voisinage des surfaces de contact où, à cause du dressage de ces dernières, elle est réduite à 2^{cm²},675.

La longueur de la ligne de force moyenne y est d'environ 554^{mm}. Les branches de l'U ont été prolongées de 60^{mm}, à partir du centre des surfaces de contact, pour servir à la fixation du système et, aussi, afin d'augmenter les fuites pour mieux voir leur effet.

L'armature mobile est formée d'un barreau parallépipédique de 173^{mm} de long et 12 × 23 de section, soit 2^{cm²},76. Les surfaces théoriques de contact avec l'U sont de 3^{cm²},17 pour le haut et de 3^{cm²},07 pour le bas. La ligne de force moyenne est d'environ 148^{cm},7. La distance du centre de ces surfaces à l'axe de rotation de la balance est de 74^{mm}.

La plus grande distance qui puisse exister entre les surfaces en regard est de 4^{mm}, ce qui fait un entrefer double maximum de 8^{mm}.

Ces surfaces de contact ont été dressées à la lime et au papier de verre, aussi soigneusement que possible; malheureusement, il ne faut pas se faire d'illusion, les contacts sont très mauvais, surtout le contact inférieur. Cela n'est pas trop gênant, tant que l'on ne vérifie pas la formule de Maxwell pour laquelle la répartition de l'induction doit être constante et ne pas varier en fonction de celle-ci. Il y a même un certain mérite pour les formules de Pérot et de Lehmann à être vérifiées dans ce cas pour les très petits entrefers (de l'ordre du 0^{mm}, 01), à cause de la variation de

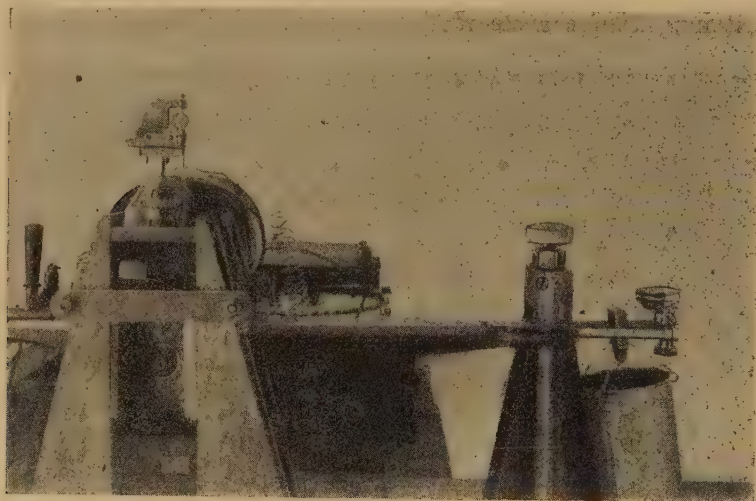


Fig. 34.

$\frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x}$ ou $\frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x}$ en fonction du flux, ce qui montre que l'hypothèse de Pérot est encore suffisante.

Nous ferons remarquer la grande longueur du fer par rapport à celle de l'entrefer et à la section du circuit magnétique. Nous avons fait cela de façon à augmenter l'influence du fer (1), et à diminuer l'importance des imperfections du dressage des surfaces de contact.

L'excitation est assurée par deux bobines de fil de $\frac{15}{10}$ isolées sous deux couches coton et bakélinées après exécution comprenant chacune deux enroulements dont l'utilité sera exposée plus tard. La bobine supérieure comprend un enroulement de 1917 spires et un autre formé par la dernière couche de 62 spires. La bobine inférieure comprend de même deux enroulements de 1927 et 60 spires. Ces enroulements, mis respectivement en série, ont donc 3844 et 122 spires, y compris celles formées par les fils de connexion.

L'ensemble du circuit magnétique est soutenu par deux portiques en

(1) Voir à ce sujet la remarque 2 de la fin du § 19.

laiton symétriquement disposés de chaque côté de l'armature mobile. Le fer à cheval est pressé fortement entre les piliers en haut et en bas par des cales de fibre. Entre ces cales se trouve le système d'articulation de la balance (*fig. 34*).

Nous avons éliminé, *à priori*, le montage de cette balance sur couteaux, car les forces à équilibrer étant horizontales, les réactions d'appui peuvent avoir une direction quelconque si ces forces ne se réduisent pas rigoureusement à un couple. Dans ces conditions, il aurait fallu mettre les couteaux dans un V très fermé et il y aurait toujours eu à craindre des déplacements, voire même, un soulèvement de toute la balance.

Pour avoir un système parfaitement guidé dans toutes les directions, nous avons monté les deux tourillons de la balance dans des roulements à billes. Nous avons utilisé des roulements à rotules français RBF de façon à assurer automatiquement le centrage et éviter les coincements. Le faible angle de rotation du fléau ne doit pas occasionner le fonctionnement de la rotule, aussi ces roulements sont-ils supérieurs, au point de vue sensibilité, aux roulements sphériques qui comportent deux rangées de billes.

Nous avons voulu proscrire systématiquement l'emploi de matériaux magnétiques, en dehors du circuit magnétique ; nous avons donc pensé utiliser de tels roulements en bronze, malheureusement, la chose a été impossible. Ces roulements en acier introduisent vraisemblablement des fuites, dont l'action n'est cependant pas très nuisible, grâce aux faibles dimensions de ces roulements et à leur place au milieu des entrefers, qui ne rompt pas la symétrie du système.

Le jeu, dans ces roulements, est bien inférieur au $0^{\text{mm}},01$, mais il aug-

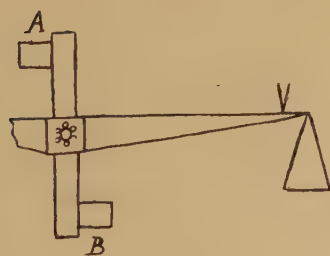


Fig. 35.

mente un peu avec l'importance des réactions d'appui, par suite des déformations élastiques des billes, pour atteindre, au cours de nos dernières mesures, $0^{\text{mm}},015$ environ. Dans la mesure de la force au collage, par suite de ce jeu, l'arrachement n'a lieu qu'en A (*fig. 35*) si les tourillons ne portent pas sur les billes de droite ; l'arrachement en B n'ayant lieu qu'en suite, lorsque la balance porte sur ces billes ; mais nous avons montré que cela avait peu d'importance sur la mesure du couple.

Cet inconvénient aurait pu s'éviter en laissant un très petit entrefer résiduel en B.

Avec un entrefer non nul, ce déplacement des tourillons n'a pas lieu, car les entrefers sont réglés au moyen d'une butée à vis, placée en bout de fléau, qui maintient toujours, par suite de sa réaction d'appui, les tourillons vers la droite. On est donc sûr, ainsi, d'avoir des mesures qui se reproduisent toujours dans les mêmes conditions, par conséquent, comparables entre elles.

Les couronnes extérieures des roulements sont montées dans deux

plaques rectangulaires en laiton maintenues chacune dans leur position par quatre vis fixées aux portiques. Le réglage et le centrage des deux roulements, au moyen de ces vis ont été assez pénibles pour obtenir le contact le meilleur possible à la fois en A et en B. Nous nous sommes servi de feuilles de papier très mince, de l'ordre de $0^{\text{mm}},01$ que nous avons mis entre les surfaces de contact et nous nous sommes arrangé pour qu'il ne soit plus possible de les sortir sans les arracher. Au cours de ces réglages, les plaques, et par conséquent la balance, étaient soutenues par deux tiges munies de vis molletées s'appuyant sur le dessus des portiques et permettant, en outre, de faire le réglage en hauteur. Le plus difficile a été d'éviter le coincement des roulements qui se produisait chaque fois que l'on bloquait les vis, par suite d'un rapprochement très petit des portiques. Nous sommes arrivé à avoir un très bon parallélisme dans le sens de la longueur des contacts, mais il reste un très léger entrefer résiduel dans le contact supérieur. Par suite de la mesure des entrefers en cet endroit, il y a avantage à ce que cet entrefer résiduel soit en haut, car ses variations n'échappent pas ainsi au contrôle et permettent de se rendre compte des flexions et des déplacements parasites.

Le fléau de la balance est formé, d'un côté par un contrepoids d'équilibre et, de l'autre par un bras portant deux traits de scie sur lesquels reposent des couteaux, l'un, situé à 390^{mm} de l'axe, supportant un seau destiné aux poids en laiton, l'autre, à $340^{\text{mm}},15$, réservé à une tige munie d'un crochet pour les poids à anneaux. Dans toutes les mesures et calculs, nous avons ramené les pesées à la position du seau, c'est-à-dire à un bras de levier de 390^{mm} .

Le dessus du bras est plat, de façon à pouvoir porter un poids mobile d'un gramme destiné à évaluer les fractions de gramme.

Le système a été équilibré au moment du réglage avec le contrepoids, alors que le fer était vierge de toute aimantation. La sensibilité était alors de l'ordre de $0^{\text{gr}},5$.

Au voisinage même des traits de scie se trouve la butée à vis dont nous avons déjà parlé, destinée à régler la valeur des entrefers. Au-dessous, se trouve une autre butée destinée à réduire la chute du fléau, au moment des pesées, et à éviter ainsi les ébranlements de l'appareil. Ces butées sont le plus éloigné possible de l'axe, de façon à avoir le réglage le plus fin possible.

Nous terminerons en disant que tout l'ensemble de cet appareil (*fig. 36*) est solidement boulonné sur une épaisse planche de hêtre. La construction a été entièrement faite à l'atelier de l'E. S. E. et presque complètement par les élèves Ingénieurs des Arts et Métiers que nous tenons à remercier ici.

25. — *Montage des circuits d'excitation et mesure des ampères-tours.* — Nous allons passer en revue les méthodes de mesure des différentes quantités qui figurent explicitement ou implicitement dans les formules que nous nous proposons de vérifier.

Normalement, l'excitation du circuit magnétique est assurée par les enroulements principaux, placés en série, des bobines dont il a déjà été parlé ; ce qui fait un ensemble de 3844 spires.

Nous avons dit que la détermination de $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}$ et de $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}$ se ferait au moyen de courbes relevées dans une déformation à flux total constant. Il est donc nécessaire de pouvoir mesurer, avec une très grande précision, les ampères-tours qu'il faut ajouter sur le circuit magnétique pour ramener le flux à sa valeur initiale correspondant à l'entrefer 0 après une variation d'entrefer pouvant être inférieure à quelques microns seulement. Dans

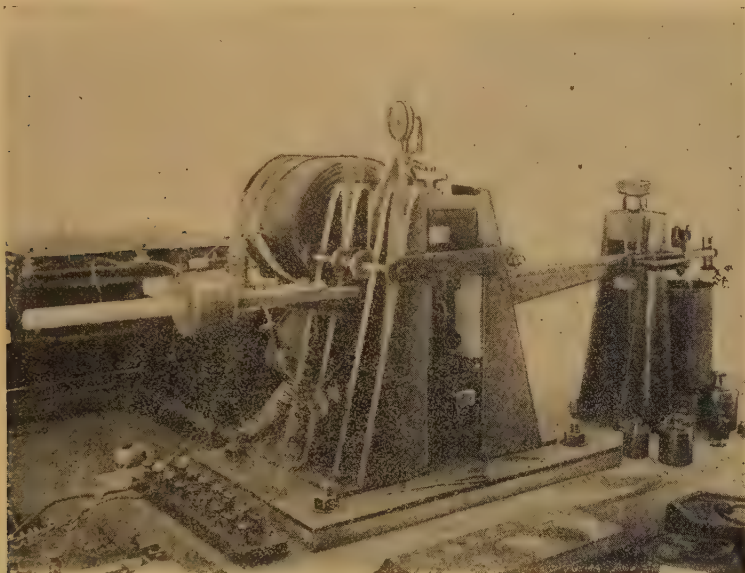


Fig. 36.

cette catégorie d'essais, ayant maintenu toujours constants les ampères-tours du premier circuit d'excitation, nous avons produit cette excitation supplémentaire au moyen des enroulements externes des deux bobines dont l'ensemble représente un faible nombre de spires : 122, qui sera parcouru, par conséquent, par des courants assez grands et facilement mesurables.

Nous ferons remarquer, pour répondre à diverses objections qui peuvent se poser, que la répartition des ampères-tours dans le sens de la longueur du circuit magnétique reste la même lorsque les deux excitations sont en service ; par conséquent, il n'y a aucune perturbation dans le tracé des lignes de fuites, et surtout, comme nous le verrons, sur la position de l'origine virtuelle. Si l'on avait placé cette excitation supplémentaire en un point quelconque du circuit magnétique, par exemple près des entrefers, il y aurait eu modification des fuites, ce qui aurait transporté l'ori-

gine virtuelle en un point n'ayant aucune signification dans le fonctionnement ultérieur de l'électro-aimant à nI constants.

Dans le sens transversal au circuit magnétique, la répartition des ampères-tours est modifiée puisque le centre d'application des enroulements principaux est la couche du milieu de chaque bobine, alors que celui des enroulements supplémentaires est la couche externe. L'action combinée des deux tend donc à déplacer vers l'extérieur des bobines principales ce centre d'application. L'excitation supplémentaire étant toujours inférieure à l'excitation principale, le déplacement n'est pas très grand ; indépendamment de cela, l'expérience montre que, si l'on produit la même excitation successivement par les deux enroulements, la répartition des flux le long du circuit magnétique est sensiblement la même.

Il ne faut pas oublier aussi que le flux total qu'il faut considérer, dans la démonstration des formules de l'attraction, est le *flux total qui passe dans le fer seul* (1) ; et non le flux à travers toute la bobine d'excitation, flux évidemment variable avec ses dimensions, ce qui entraînerait une influence de la position, dans le sens transversal, de l'excitation supplémentaire.

A cause de l'hystérésis le flux qui correspond à un couple déterminé de valeurs des ampères-tours et de l'entrefer dépend des traitements antérieurs subis par le fer. Il faut donc, dans les essais, préciser ces traitements et faire toujours les mêmes opérations pour avoir le même flux.

Le plus simple, pour se retrouver toujours dans les mêmes conditions, est d'opérer, pour chaque mesure, par inversion totale de l'excitation qui ramène les caractéristiques relevées à correspondre au lieu du sommet des cycles d'hystérésis, courbe parfaitement définie et toujours semblable à elle-même. Même si les flux antérieurs ont été plus grands que le flux actuel, il suffit d'un nombre d'inversions assez restreint pour stabiliser sa valeur et le ramener à être toujours le même pour un couple de valeurs de nI et de x . Malgré cela, nous avons fait nos différentes séries d'essais en partant de valeurs initiales croissantes des flux, en évitant, le plus possible, de revenir en arrière. Ce mode opératoire, qui simplifie beaucoup les choses, n'est possible que grâce à la remarque déjà faite que les attractions sont indépendantes de la *forme* des caractéristiques, remarque qui se trouve, par cela même, vérifiée.

Dans quelques cas seulement, nous avons cheminé sur la branche descendante du cycle d'hystérésis, en partant d'un flux maximum bien stabilisé par plusieurs inversions.

La figure 37 représente le montage des circuits d'excitation. Les deux excitations sont inversées simultanément par un inverseur double I à action très rapide.

Le courant d'excitation principal I_1 est fourni par une batterie d'accumulateurs de 40 éléments de 60 AH, qui n'a servi, pendant toutes nos

(1) Une vérification expérimentale de ce fait est l'application des formules 7) et 10) aux aimants.

recherches, qu'à cet usage. Ce courant est réglé, d'une part, par le nombre d'accumulateurs en service, et, d'autre part, par deux rhéostats placés en R_1 .

Le courant d'excitation supplémentaire I_2 est fourni par quelques accumulateurs portatifs. Ce courant est réglé par le nombre d'éléments et par divers rhéostats de valeurs différentes disposés en R_2 .

Un interrupteur double B permet simultanément de couper I_2 et d'intercaler dans le circuit principal une résistance variable R_3 dans le but de relever la branche descendante des cycles d'hystérésis. En C se trouve

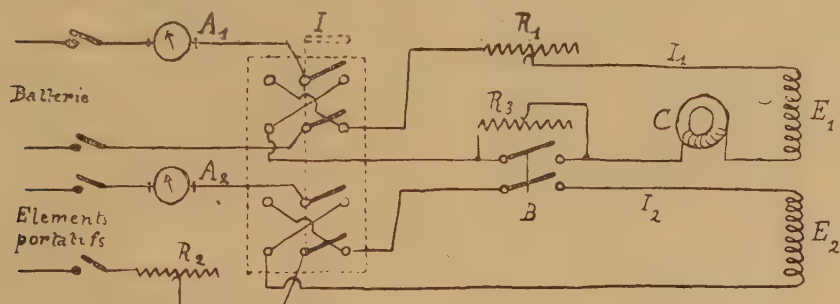


Fig. 36.

un « compensateur » traversé par le courant I_1 et qui sera décrit dans le paragraphe suivant.

Les courants I_1 et I_2 sont mesurés par deux ampèremètres à cadre mobile possédant les shunts $0,1$ — $0,5$ — 1^A — 2^A — 5^A . Nous avons soigneusement comparé ces appareils et leurs shunts entre eux et avec un étalon du L. C. E.

26. — *Mesure des flux.* — Les flux, ou, plus exactement, les variations de flux seront mesurées suivant la méthode bien connue au moyen de la quantité d'électricité induite dans une bobine sonde placée à l'endroit à étudier, cette quantité d'électricité étant mesurée à l'aide d'un galvanomètre balistique étalonné chaque fois dans les conditions mêmes d'utilisation.

A cet effet, le fer à cheval possède, en onze endroits différents, onze bobines sondes en fil de 2/10 sous deux couches soie de 200 spires chacune. L'armature mobile en possède deux ayant les mêmes caractéristiques et pouvant se coulisser de façon à explorer toute une région. La longueur de chacune d'elles est très petite, de façon à pouvoir mesurer le flux en une région bien déterminée, d'autant plus petite que le flux y est susceptible de varier rapidement. La figure 38 donne l'emplacement respectif de ces bobines avec les numéros qui serviront à les désigner, par la suite.

Ces bobines sont isolées du fer par un ruban de coton d'épaisseur pratiquement négligeable, de sorte qu'elles mesurent les flux qui passent uniquement dans le fer et qu'il faut seuls considérer dans l'application

des formules. A titre de contrôle, nous avons placé une bobine sonde de 20 spires, portant le n° 14, à l'extérieur de la bobine d'excitation supérieure. Les extrémités de ces bobines, soigneusement toronnées pour éviter l'influence des flux parasites, aboutissent à un clavier de bornes.

Si $\Delta\Phi$ est la variation de flux à mesurer, la variation totale de flux à

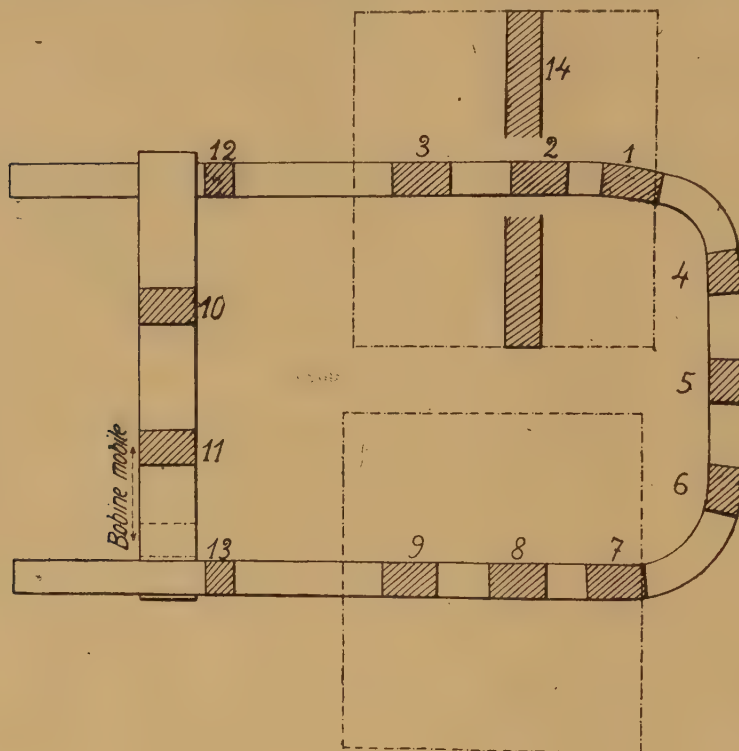


Fig. 38.

travers une bobine sera $200 \Delta\Phi$ et la quantité d'électricité induite dans cette bobine sera donnée par l'expression bien connue :

$$\frac{200\Delta\Phi}{R} = K\theta,$$

en désignant par R la résistance totale du circuit (fig. 39, I) comprenant la bobine, le galvanomètre, la résistance étalonée r , et les fils de connexion ; par K la constante du balistique correspondant à cette résistance R , et par θ son élancement.

Il est bien évident qu'il faut, pour que θ puisse servir de mesure à cette quantité d'électricité, que la totalité de la décharge ait lieu avant que le balistique se soit mis sensiblement en mouvement. Or, on sait qu'une variation de flux dans un circuit magnétique est d'abord ralenti par la self-induction du circuit d'excitation et aussi par le traînage magnétique. Il est donc nécessaire, dans toutes les mesures de flux par cette méthode, d'utiliser un balistique à longue période.

Nous nous sommes servi d'un balistique à cadre mobile ayant une période de 15 secondes environ, la suspension supérieure étant constituée par un fil d'argent de $\frac{10}{100}$ et de 230^{mm} de longueur, et celle du bas par une spirale sans torsion en fil de bronze plat. Cette durée est un strict minimum et il faut même s'attendre, dans certains cas, à avoir des mesures des flux entachées d'une erreur par défaut.

La résistance R doit être faible pour avoir des élongations grandes pour

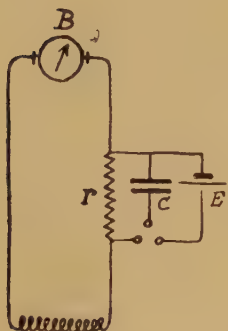


Fig. 39 I.

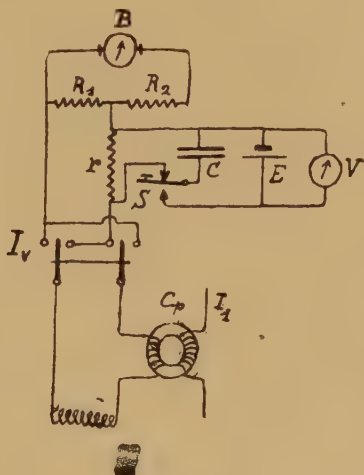


Fig. 39 II.

de petites variations de flux. Aussi, avons-nous pris un cadre de quelques ohms seulement de résistance et ayant peu de spires. Il y a avantage, en effet, pour un poids donné du cadre, à avoir peu de spires en gros fil que beaucoup en fil fin ; il y a toutefois une valeur optima, les autres résistances du circuit de mesure étant constantes.

Dans ces conditions, la résistance critique est de l'ordre de 60 ω .

La sensibilité du balistique devenant rapidement trop grande au cours de nos essais, nous avons été obligé de le shunter au moyen de deux boîtes jumelées R_1 et R_2 (fig. 39, II), la décharge n'ayant lieu qu'aux bornes de l'une d'elles. La proportionnalité de l'élongation θ à la décharge n'est pas altérée par ce shunt, comme on le démontre facilement. Ces boîtes sont jumelées sur 70 à 90[°] valeur légèrement supérieure à la résistance critique, ce qui rend le retour au zéro plus rapide et supprime toute incertitude sur ce retour, le système faisant trois élongations.

Le réglage de la sensibilité se fait, à la fois, par la variation de R_1 et de r . Cette dernière résistance ne doit pas descendre au-dessous d'une certaine valeur que nous avons prise égale à 200[°] pour ne pas apporter de perturbations dans le circuit magnétique.

L'étalonnage du balistique doit se faire dans les mêmes conditions d'amortissement que dans la mesure des flux. Nous nous sommes servi,

dans ce but, de la décharge d'une capacité connue C , chargée à la tension E , aux bornes de la résistance r . On a, en effet :

$$\frac{CEr}{R} = K\theta',$$

K étant évidemment le même. D'où :

$$\frac{200\Delta\Phi}{CEr} = \frac{\theta}{\theta'}.$$

Nous avons adopté cette méthode plutôt que celle utilisant une induction mutuelle connue, par raison de commodité et de souplesse, bien que cette dernière lui soit préférable.

La capacité C utilisée est un condensateur au mica de $1\mu F$, de fabrication anglaise entaché d'une erreur *par excès*, inférieure à $1/4$ %. Il est chargé et déchargé aussitôt après au moyen d'une clé de Sabine S. La tension E est fournie par une batterie de petites piles Leclanché donnant jusqu'à 80^v . Cette tension est mesurée par un voltmètre à cadre mobile, et mis en service pendant toute la durée de l'étalonnage, la chute de tension à l'intérieur des piles et leur polarisation étant grandes. Ce voltmètre est exact, aux erreurs de lecture près.

Nous avons finalement, en tenant compte des unités, E étant exprimé en volts et r en ohms :

$$\Delta\Phi = \frac{Er}{200} \frac{\theta}{\theta'} \text{ Maxwells,}$$

et dans le cas d'une mesure du flux par inversion totale de l'excitation :

$$\Phi = \frac{Er}{400} \frac{\theta}{\theta'} \text{ Maxwells.}$$

Dans ce dernier cas, nous nous sommes efforcé d'avoir dans toutes les mesures θ ainsi que θ' aussi constants que possible pour éliminer les erreurs de proportionnalité du balistique, d'ailleurs très faibles.

Un inverseur I_v permet de ramener les décharges inductives à être toujours dans le même sens dans le balistique.

Nous avons dit que nous serions amené à relever des courbes correspondant à une déformation à flux constant du circuit magnétique. Le gros problème pour maintenir ce flux constant est de le repérer avec une très grande exactitude. Dans la mesure normale des flux par inversion totale, l'élongation θ est de l'ordre de 140 à 150^{mm} que nous pouvons lire

à $\frac{1}{10}$ mm. près. L'égalité de deux flux correspondant à deux entrefers différents peut donc se juger par cette méthode avec une erreur possible

de $\frac{1}{700}$ environ. Pour les faibles entrefers, et même, d'une façon générale, cette précision est insuffisante pour pouvoir tracer avec certitude les courbes, afin de mener sans ambiguïté les tangentes.

Aussi, nous avons utilisé un « compensateur » dans le but de repérer plus exactement les flux (et non de les mesurer) dont le principe vient

du transformateur à entrefer variable existant dans le perméamètre Picou-Carpentier. Il est constitué par un circuit magnétique fermé excité au moyen d'un enroulement parcouru par le courant d'excitation principal I_1 que nous avons vu être constant dans chaque série de mesure à flux constant. Ce circuit magnétique porte un enroulement secondaire dans lequel se trouve induite une certaine quantité d'électricité à chaque inversion de I_1 . Cet enroulement secondaire est intercalé dans le circuit normal de mesure des flux en C_p de telle façon que la décharge inductive qui s'y produit et qui est *constante* se *retranche* de celle venant de la bobine sonde.

On retranche donc de l'élongation θ une quantité constante — de l'ordre des $2/3$ aux $3/4$ de cette élongation — de sorte que l'élongation résultante n'est plus que le $1/3$ ou le $1/4$ de la première. On peut donc utiliser, sans inconvénient, une sensibilité du balistique trois ou quatre fois plus grande, ce qui augmente d'autant la précision avec laquelle on repère le flux.

Le circuit magnétique de ce compensateur a été fait avec le même fer que celui de notre appareil d'études et l'enroulement a été déterminé pour que les inductions se correspondent à peu près afin d'éviter les ennuis relatifs aux inégalités de traînage magnétique. Ce sont, en effet, ces inégalités qui peuvent seules influencer sur la similitude des décharges puisque le courant d'excitation est commun.

Nous avons pu, grâce à ce compensateur, ramener les flux à être égaux pour les entrefers de 0,01 à 0^{mm},02 avec une indétermination sur ces entrefers inférieure à $\frac{1}{2} \mu$.

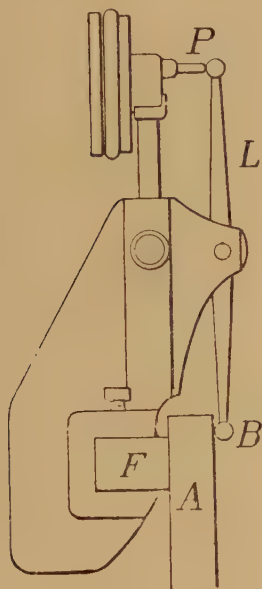


Fig. 40.

27. — *Mesure des entrefers.* — Les entrefers sont mesurés au moyen d'un indicateur « Starrett » fixé au fer à cheval F au-dessus de l'entrefer supérieur à l'aide d'une pièce de bronze de forme appropriée venue de fonderie (fig. 40). Les déplacements de l'armature mobile A lui sont communiqués par l'intermédiaire d'un levier de renvoi L à rapport unité qui s'appuie en un point B situé à 82^{mm} de l'axe de la balance. *Ce sont les déplacements de l'armature en ce point B que nous avons adoptés comme valeur de la variable x .*

Le déplacement réel est circulaire alors que l'on enregistre en B un déplacement selon une droite horizontale, malgré l'existence du levier L puisque le palpeur P de l'indicateur ne peut que coulisser ; mais ce déplacement ne dépassant pas, comme nous l'avons dit, 4^{mm}, on peut, sans inconvénient, confondre l'arc avec sa tangente. L'angle de rotation de

l'armature est exprimé par le rapport $\frac{x}{82}$. Les dérivées à flux total constant de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{R}$ prises par rapport à cette variable permettront de calculer le couple communiqué à l'armature par les attractions du haut et du bas. Si nous nous contentons de prendre ces dérivées par rapport à x , nous aurons l'expression de la force appliquée au point B , perpendiculairement à l'armature, à laquelle peut se réduire l'effet de ces attractions.

Si nous multiplions cette force par $\frac{82}{390}$, nous serons ramené à une force appliquée au bout du fléau, à l'endroit où se font les pesées, ce qui permettra une comparaison directe des forces calculées et des forces mesurées.

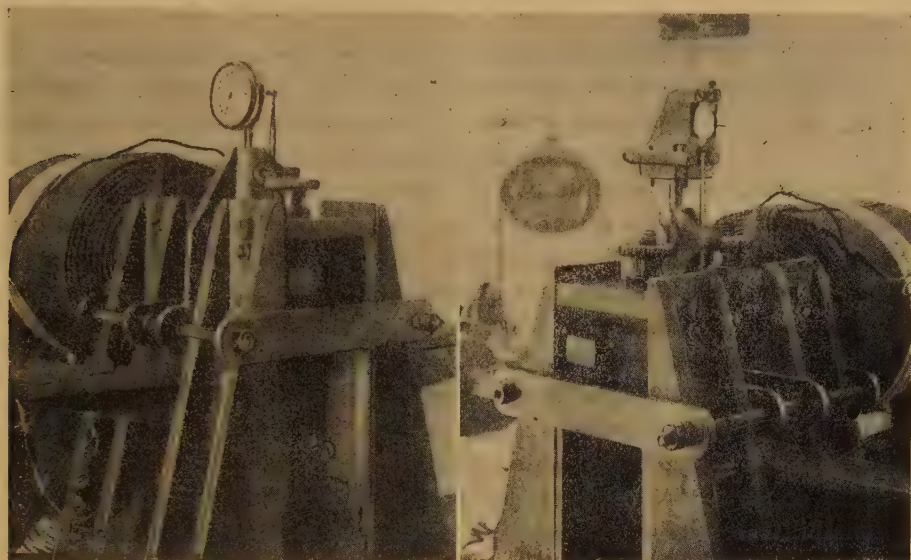
L'indicateur Starrett à cadran est du type des indicateurs ou comparateurs utilisés maintenant en ajustage. Cet appareil possède une aiguille qui fait un tour de cadran par millimètre d'enfoncement du palpeur, avec une course de ce dernier de 5^{mm}. Ce cadran est divisé en 100 parties égales qui représentent donc des $\frac{1}{100}$ de millimètre. Il est mobile afin de pouvoir amener le zéro de la graduation sous une position quelconque de l'aiguille prise comme origine.

Nous avons pris comme origine l'indication de l'appareil à l'instant où l'armature vient buter contre le fer à cheval. A ce moment, comme nous l'avons signalé, il y a contact en divers points de l'entrefer inférieur et un léger espace résiduel dans celui du haut. A cause de l'écrasement des billes, cet espace diminue lorsque l'attraction augmente et que la balance est à *vide* ; il y a un déplacement de zéro allant jusqu'à 32 μ . Au contraire, lorsque le zéro est réglé après avoir chargé la balance au voisinage de l'équilibre, il reste remarquablement constant à quelques μ près, quelle que soit la force. C'est naturellement ce zéro que nous avons pris comme origine des entrefers pour les pesées (1).

L'indicateur, bien que le jeu des pignons soit compensé par des ressorts, n'indique pas le même résultat pour le même entrefer lorsque celui-ci est obtenu par valeurs croissantes et décroissantes : la différence est légèrement supérieure à 0^{mm},01 ; mais si l'on revient au même point, toujours dans les mêmes conditions, l'aiguille donne toujours la même indication à près de $\frac{1}{10}$ de division. Nous avons donc toujours mesuré les entrefers après les avoir fait décroître, au préalable, en appuyant avec le doigt sur le fléau et en le laissant revenir lentement contre la butée. Dans ces conditions, nous pourrions avoir les entrefers à moins de $\frac{1}{3}$ de division près, c'est-à-dire 2 μ .

(1) Il est nécessaire dans la mesure des flux que la balance ne soit pas chargée, sans quoi au moment où le courant s'annule le fléau retomberait et pourrait ne pas revenir ensuite à la position initiale.

Le jeu, dans le pivotage du levier L, ne diminue pas cette précision, car le palpeur opposant une force de 8^s au minimum détermine des réactions d'appui très nettes et dirigées toujours dans le même sens. Il en est de même des flexions de ce levier et des différentes parties de notre appareil, particulièrement du fléau de la balance, qui occasionnent une diminution de l'entrefer de 1μ par 60^s d'attraction pour une même position de la butée. Il suffit de régler les entrefers dans les conditions de mesure



I

II

Fig. 41.

pour que les flexions soient constantes et ne provoquent aucune perturbation.

La figure 41, I montre l'indicateur monté sur l'appareil.

Ce procédé de mesure des entrefers convient dans tous les genres d'essais auxquels nous nous sommes livré, mais nous l'avons reconnu insuffisant pour le relevé des courbes à flux constant lorsque l'entrefer est inférieur à $0^{mm},40$ environ. Nous avons dû, dans ce cas, opérer différemment afin d'augmenter la précision :

1° pour les entrefers très faibles de 0 à $0^{mm},15$ environ nous avons substitué à l'indicateur, sur le même support de bronze, un micromètre à miroir de notre conception et fabriqué à l'atelier de l'Ecole. Il se compose (fig. 42) d'un levier pivoté en O sur lequel agit en A l'extrémité du système de renvoi L des déplacements de l'armature. Ce levier, terminé par un doigt, communique ses déplacements, en les amplifiant, à un cylindre C pivoté entre pointes et sur lequel est collé un miroir de galvanomètre M. La rotation de ce cylindre est mesurée à l'aide d'une échelle de galvanomètre. Un ressort R sert de rappel et bloque les jeux de tous les axes. La

sensibilité peut être réglée en déplaçant tout le micromètre par rapport à A.

La figure 41- II montre le micromètre dans sa position de fonctionnement.

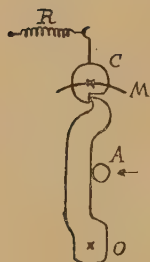


Fig. 42.

Son étalonnage se fait en comparant ses indications avec celles de l'indicateur, placé en bout de fléau et qui, dans cette position, est fixé au support des butées par l'intermédiaire d'une pièce *ad hoc* (fig. 34). Ses indications, dans ces conditions,

sont les $\frac{398}{82}$ de celles correspondant à la place normale à

82^{mm} de l'axe. Nous avons, du reste, dans chaque essai, mesuré directement ce rapport en transportant l'indicateur d'une position à l'autre. Toutes ces mesures annexes doivent se faire, évidemment, lorsque l'excitation est coupée, de façon

à être gêné le moins possible par les flexions du fléau.

Le résultat de l'étalonnage est que le micromètre est proportionnel, sur la majeure partie de son échelle, et que sa sensibilité se tient dans toutes les séries de mesures aux environs de 15^{mm} sur l'échelle par 0^{mm},01 d'entrefer, ce qui permet de mesurer le 1/4 de μ , tout au moins pour les entrefers très faibles.

Nous avons, dans toutes ces mesures, enregistré les indications des deux appareils à titre de contrôle.

2° Pour les entrefers compris entre 0^{mm},15 et 0,35 à 0^{mm},40, nous nous sommes contenté des lectures de l'indicateur placé en bout de fléau où la sensibilité est environ cinq fois plus grande qu'à la place normale ; cependant, la précision des mesures est un peu diminuée par rapport à ce que l'on était en droit d'attendre par suite des flexions importantes du fléau, qui entraînent toute une série de corrections très laborieuses. Il faut, en effet, déterminer d'abord très exactement la flexion unitaire et calculer ensuite les attractions pour chaque point relevé, en partant des courbes des flux et des pesées faites à excitation constante.

28. — *Mesure des attractions.* — La mesure des attractions se fait, comme nous l'avons dit, en équilibrant les couples qu'elles produisent par des poids placés à l'extrémité du fléau constituant un bras de levier de 390^{mm}.

Nous avons fait une soixantaine de séries de pesées à *excitation constante* pour les différentes valeurs d'entrefer qui suivent :

0 — 0,003 — 0,01 — 0,02 — 0,03 — 0,05 — 0,10 — 0,15 — 0,20 — 0,25 — 0,30 — 0,40 — 0,50 — 0,60 — 0,75 — 1,00 — 1,25 — 1,50 — 1,75 — 2,00 — 2^{mm},50 —

en allant de plus en plus loin, au fur et à mesure que les forces devenaient décelables, et en supprimant les valeurs 0,003, puis 0^{mm},01 pour les fortes inductions à cause de la difficulté de réaliser exactement ces entrefers.

Pour que les flux agissant dans chaque cas soient parfaitement définis, en vertu de la construction de la figure 19 (voir paragraphe 17) faite en

fonction des flux totaux, il faut que la caractéristique partielle de la partie indéformable qui y figure soit parfaitement définie ; nous avons dit que le plus simple, dans ce cas, était de choisir la caractéristique lieu du sommet des cycles d'hystérésis qui se retrouve toujours semblable à elle-même. Il est même nécessaire, comme nous le verrons bientôt, que les forces mesurées correspondent aux mêmes caractéristiques que les forces calculées pour que la comparaison soit rendue plus facile.

Nous avons donc inversé plusieurs fois l'excitation après le réglage de chaque valeur de l'entrefer et exécuté des mesures par valeur croissante des entrefers, ce qui correspond à une diminution *progressive* des flux, chose nécessaire pour bien fixer la caractéristique dans ce cas.

Toutefois, au début de nos essais, pour les très faibles inductions, il nous a été impossible de faire disparaître complètement le rémanent venant des premiers tâtonnements. Dans ces conditions, les forces sont différentes suivant le sens de l'excitation. Bien que les cycles d'hystérésis relevés soient parfaitement symétriques, il faut conclure, d'après cela, qu'ils ne sont pas symétriques par rapport à l'origine des coordonnées ; la mesure des flux ne donnant, par suite, qu'une valeur moyenne, il est donc nécessaire, partant des mesures des forces dans chaque sens de l'excitation, de déterminer l'attraction correspondant à cette valeur.

D'après notre hypothèse sur l'hystérésis, nous pouvons attribuer le rémanent à une excitation constante $n_0 I_0$ toujours de même sens. Les forces mesurées, pour chacun des sens de l'excitation normale, seront donc égales à :

$$F' = K(n_1 I_1 + n_0 I_0)^2,$$

$$F'' = K(n_1 I_1 - n_0 I_0)^2.$$

Comme nous voulons la force correspondant à $n_1 I_1$ seul, c'est-à-dire :

$$F = K(n_1 I_1)^2,$$

il est facile de voir que l'on a :

$$\sqrt{F} = \frac{\sqrt{F'} + \sqrt{F''}}{2},$$

relation que l'on aurait pu établir en partant des flux et qui est vérifiée par l'expérience (1).

Lorsque les forces F' et F'' diffèrent très peu, il suffit de prendre la moyenne, c'est ce que nous avons fait ensuite pour toutes nos mesures.

Il faut remarquer — bien que les flux pour chaque entrefer soient donnés

(1) Ainsi, dans un cas, nous avons trouvé pour le collage :

$$F' = 22^{\text{gr}}5, \quad F'' = 11^{\text{gr}}5, \quad (I = 0^{\text{A}}, 0116),$$

alors qu'en supprimant le rémanent et ayant la même force dans les deux sens, nous avons mesuré $5^{\text{gr}}8$. On a :

$$F = \left(\frac{\sqrt{2,5} + \sqrt{11,5}}{2} \right)^2 = 6^{\text{gr}}, 05.$$

La différence s'explique si l'on regarde la figure 46, parce que le coefficient de proportionnalité de la force au carré du flux utile n'est pas constant dans le cas du collage.

La simple moyenne aurait donné 7^{gr} .

par la construction citée au début du paragraphe (fig. 43), faite avec la caractéristique, lieu du sommet des cycles, commune aux autres natures d'essais — qu'au cours des pesées, le système évolue — virtuellement, si l'on veut — le long d'un épi qui se détache de la courbe C_1 en A et qui n'est autre que l'amorce d'une *branche d'un cycle d'hystérésis*. Nous avons déjà dit que cela constituait une vérification de l'indépendance des attractions vis-à-vis de la forme des caractéristiques du fer.

Nous avons fait quelques essais en cheminant sur la branche descen-

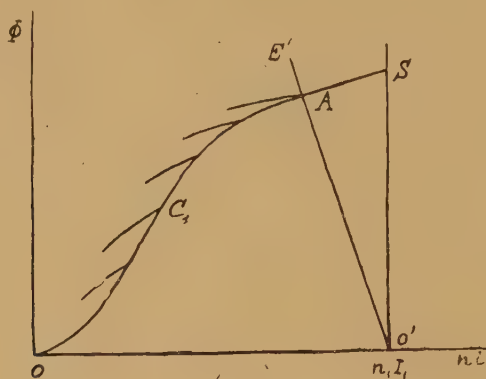


Fig. 43.

dante du cycle d'hystérésis en partant de l'entrefer zéro avec un flux bien stabilisé et en ne touchant plus ensuite à l'excitation ; nous avons fait aussi des mesures dans le cas du fonctionnement en aimant sur lequel nous reviendrons très en détail.

Pour les très faibles entrefers, jusqu'à $0^{\text{mm}},05$ et, surtout, pour le collage, la force décroît très vite quand l'entrefer augmente, aussi l'équilibre est-il, dans ce cas, éminemment instable, ce qui rend les pesées très délicates. Il faut, en particulier quand on est au voisinage immédiat de l'équilibre, ramener le fléau contre la butée après sa chute en ne l'abandonnant qu'au bout d'un certain temps, à cause de la durée du rétablissement du flux, cependant très réduite grâce à la limitation de la course du fléau à une fraction de millimètre.

Pour les faibles inductions, on peut mesurer la force au collage avec une *incertitude* de 2 % environ ; cette incertitude diminue aussitôt que l'entrefer n'est plus nul pour atteindre 1 % et même 0,5 % lorsque l'on n'est pas limité par la sensibilité de la balance. Pour les inductions moyennes la force au collage est connue à 1 % et même moins, et les autres à 0,5 et 0,25 %. Il ne faut pas confondre cette incertitude dans les pesées avec l'erreur possible commise sur la détermination de la force pour un entrefer déterminé et un flux donné, car il y a toujours une erreur sur le réglage de cet entrefer et la stabilisation des flux. Le grand nombre de points relevés nous a permis de tracer, pour chaque entrefer,

des courbes construites en fonction des *quantités réduites* $\frac{F}{\Phi_{u0}^2}$, Φ_{u0} étant le flux utile correspondant à l'entrefer zéro dans la série de pesées à excitation constante considérée. Cette quantité pour un entrefer déterminé doit rester constante tant qu'il n'y a pas variation de l'inclinaison des caractéristiques autour du point étudié. Le tracé moyen nous a permis de calculer la vraie valeur des pesées que l'on aurait dû trouver en partant d'un flux Φ_{u0} donné. Il n'est pas rare de trouver deux séries de mesures consécutives présentant des différences entre les quantités réduites atteignant 5 et 10 % alors que toutes les mesures ont été faites à moins de 2 %.

CHAPITRE IV

EXPOSÉ DES RÉSULTATS RELATIFS A LA VÉRIFICATION DES FORMULES DE L'ATTRACTION DES ÉLECTRO-AIMANTS.

29. — *Vérification des formules de l'attraction de l'électro-aimant. Mode opératoire.* — Nous avons fait la vérification des formules 7) et 10) d'une façon complète pour 5 valeurs de l'excitation s'étageant depuis le début de la courbe de magnétisme jusqu'au coude. Pour les points au delà nous n'avons fait qu'une vérification par rapprochement de chiffres, les attractions étant trop grandes pour permettre le relevé des courbes avec suffisamment de précision.

Chacun de ces 5 points a nécessité les séries d'expériences suivantes :

1° Relevé de la courbe de l'excitation supplémentaire $n_2 I_2$ en fonction de l'entrefer x à *flux total constant* ; et concouramment, relevé de la courbe du flux utile en fonction de $n_2 I_2$, le flux total étant constant.

2° Relevé de la courbe des *flux totaux* à $n_1 I_1$ constants en fonction des entrefers.

3° Mesure des attractions en fonction de l'entrefer à $n_1 I_1$ constants.

Ces trois séries de mesures étant exécutées en faisant décrire au fer les mêmes caractéristiques, de façon à avoir dans chaque cas des *distributions de flux comparables*.

a) *Relevé de la courbe de $n_2 I_2$ en fonction de x à flux total constant.* — Nous avons dit que dans cette expérience, les ampères-tours d'excitation étaient composés d'une partie fixe $n_1 I_1$ et d'une partie variable $n_2 I_2$. La première opération à faire, après s'être fixé $n_1 I_1$ et avoir *mesuré* pour l'entrefer zéro le flux total et le flux utile correspondants, consiste à mettre le compensateur en service et à *repérer* ce flux total, toutes ces mesures se faisant, naturellement, par inversion complète de l'excitation.

Ensuite, guidés par les intervalles à obtenir entre les points de la courbe pour avoir un tracé convenable, nous nous sommes fixé un certain nombre de valeurs de l'excitation supplémentaire $n_2 I_2$. Pour chacune de ces valeurs, nous avons ramené le flux total à être le même par variations de l'entrefer lesquelles peuvent être produites d'une façon absolument continue. A chaque essai d'une valeur de l'entrefer, on ne peut juger du résultat obtenu qu'à la quatrième ou cinquième inversion à cause de la stabilisation lente du système ; ces essais doivent être poursuivis jusqu'à avoir

une élongation égale à celle du repérage à moins de $1/10^{\text{mm}}$ près. Nous ne reviendrons pas sur la mesure des entrefers dans ce cas.

Tous les trois ou quatre points et même plus souvent lorsque l'appareil est depuis peu sous tension, il est prudent, après avoir supprimé $n_2 I_2$ et ramené l'entrefer à zéro, de vérifier si l'élongation de repérage du flux total n'a pas varié.

Tous les trois ou quatre points, nous avons aussi mis le compensateur hors service afin de mesurer les valeurs correspondantes du flux utile et du flux en diverses autres régions.

La partie du circuit magnétique traversée par le flux total doit se trouver, évidemment, à l'intérieur des bobines et même théoriquement en leur milieu. Toutefois l'expérience montre que cette partie se trouve légèrement au delà du milieu par rapport aux entrefers en un point, d'ailleurs variable avec la saturation, situé entre les bobines sondes 1 et 2, et 3 et 4 par raison de symétrie où les élongations sont sensiblement les mêmes. Voici, du reste, un exemple de répartition des flux sur le demi-circuit magnétique supérieur.

Sondes N° (Voir fig. 38)	Entrefer 0	Elongations en mm.
		Entrefer 3 mm (déformation à $n_1 I_1$ constants)
5	147	84,2
4	148,2	83,9
1	154,2 (5960 ^{Max})	90,8
2	154,2	90
3	148,8	81,2
12	127,3	51,8
10	111,8	31,7
11	111,8	31

Si nous produisons une déformation à flux constant au niveau de la bobine 2 : Φ_2 , le flux en 1, Φ_1 , ne semble pas le dépasser, aussi avons-nous adopté Φ_2 comme valeur du flux total.

Pour ce qui est de la valeur maxima du flux dans l'armature mobile à prendre comme flux utile, qui, théoriquement doit se rencontrer au milieu de cette armature et pratiquement un peu au dessus d'après l'examen des résultats précédents, doit-on craindre une erreur du fait que cette région est inaccessible et que les bobines 10 et 11 en sont à une certaine distance ?

Nous avons donc relevé, pour quelques entrefers, la courbe des flux mesurée par la bobine mobile 11 en fonction des positions de cette bobine et extrapolé ensuite jusqu'à l'abscisse du milieu de l'armature. Les résultats, cependant peu rigoureux à cause de la méthode employée, donnent les indications suivantes, assez rassurantes :

Entrefers mm	Elongations en 10 mm	Elongations présumées au milieu mm	Erreurs %
—	—	—	—
0,	111,8	112,1	0,2
0,50	148,1	149	0,7
1,00	121	121,5	0,8
3,00	83,6	85,2	1,9

On peut donc accepter la valeur du flux mesurée par la bobine 10, Φ_{10} , comme *valeur du flux utile* sans commettre de grandes erreurs.

b) *Relevé de la courbe des flux totaux à $n_1 I_1$ constants en fonction de l'entrefer.* — Il suffit pour relever cette courbe de faire varier l'entrefer par valeurs croissantes et de noter chaque fois l'élongation correspondante en 2. Il faut, bien entendu, après chaque accroissement de l'entrefer, opérer un certain nombre d'inversions — 5 à 6, au moins — avant d'avoir des indications constantes. Comme on procède par valeurs décroissantes des flux, il faut en éviter les variations trop brusques et non progressives; et comme l'on doit encore vérifier, de temps en temps, si l'élongation de départ pour l'entrefer zéro est restée la même, il ne faut revenir que progressivement à la zone en cours d'étude. Lorsque l'on fait cette vérification, l'élongation ne prend sa valeur définitive qu'après un très grand nombre d'inversions — 10 à 20 —.

La mesure des entrefers a besoin d'être aussi précise que dans la méthode précédente, aussi avons-nous utilisé les mêmes procédés pour les entrefers faibles. Pour avoir une précision correspondante dans la mesure des élongations pour ces mêmes entrefers, nous nous sommes servi du compensateur avec une plus grande sensibilité du balistique. La comparaison des différences entre les élongations pour deux entrefers (dont l'entrefer zéro), avec et sans compensateur, permet de ramener les résultats à la même échelle. Cette équivalence doit être, du reste, déterminée pour trois ou quatre points, afin d'avoir une moyenne exacte et de ne pas ainsi détruire le supplément de précision que l'on vient de gagner.

c) *Calcul de l'attraction.* — En partant des données de l'essai a) nous pouvons construire les deux courbes suivantes :

1° Courbe de $n_2 I_2$ en fonction de l'entrefer à flux total constant, qui n'est autre que la courbe de l'excitation totale $nI = n_1 I_1 + n_2 I_2$ décalée de la quantité constante $n_1 I_1$. La tangente en un point de cette courbe représente donc la dérivée $\frac{\partial nI}{\partial x}$ prise à flux total constant pour la valeur Φ_2 de ce flux et pour l'entrefer x . Cette dérivée s'exprime en ampères-tours par cm. et $0,4\pi \frac{\partial nI}{\partial x}$, homogène à un champ, en gauss. Il faut donc que les entrefers soient exprimés en *centimètres*.

2° Courbe de la perméance totale du circuit magnétique :

$$\mathcal{R} = \frac{\Phi_2}{0,4\pi n l} = \frac{\Phi_2}{0,4\pi(n_1 l_1 + n_2 l_2)},$$

en fonction de l'entrefer. Cette perméance s'exprime en Maxwells par Gilbert homogènes à des centimètres. La tangente à cette courbe en un point déterminé d'abscisse x représente la dérivée partielle $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}$ prise à flux total constant pour la valeur Φ_2 de ce flux et pour l'entrefer x . On l'obtiendra en Maxwells par Gilbert par cm., quantité de dimensions nulles, à la condition que les entrefers soient exprimés en cm.

Pour calculer l'attraction en un point, nous nous sommes servi de l'une ou de l'autre de ces deux dérivées, ce qui correspond à l'application des deux formules équivalentes 10) et 7) étendues à la *totalité* du circuit magnétique (1).

Dans le premier cas, l'attraction en chaque point est donnée par :

$$F = \frac{\Phi_2'^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \right)_{\Phi_2, x = x_0}$$

Φ_2' étant la valeur actuelle du flux total pour l'entrefer x_0 dans la déformation à $n_1 l_1$ constants.

Nous avons dit dans le paragraphe 18 que $\frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x}$ était théoriquement indépendant du flux *utile*, chose qui est encore vraie pour la dérivée de la réluctance *totale* $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}$ vis-à-vis du flux *total* Φ_2 pour des valeurs peu différentes de celui-ci, tant qu'il n'y a pas variation dans la répartition des fuites. D'autre part, comme $\mathcal{R}_{\Phi_2} = \frac{4\pi n l}{\Phi_2}$, on a :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \right)_{\Phi_2} = \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \right)_{\Phi_2} = \frac{4\pi}{\Phi_2} \left(\frac{\partial n l}{\partial x} \right)_{\Phi_2}.$$

D'où :

$$F = \frac{\Phi_2'^2}{2\Phi_2} \left(\frac{\partial n l}{\partial x} \right)_{\Phi_2, x = x_0}$$

ou :

$$F = \frac{1}{981} \frac{82}{390} \frac{\Phi_2'^2}{2\Phi_2} \left(\frac{\partial n l}{\partial x} \right)_{\Phi_2, x = x_0} \quad (11)$$

l'attraction étant exprimée en grammes et ramenée à l'extrémité du fléau à l'endroit où se font les pesées pour permettre une comparaison directe. Φ_2 est donné par la courbe des flux totaux en fonction de l'entrefer dont nous venons de parler en b).

(1) Le calcul, en partant de ces courbes, n'est théoriquement valable que pour le même flux Φ_2 , quel que soit l'entrefer choisi ou pour l'excitation $n_1 l_1 + n_2 l_2$ qui lui correspond. Pour des raisons de simplicité faciles à comprendre, nous avons fait les pesées en maintenant constante l'excitation $n l$, par conséquent à flux variables, mais comme ces flux ne sont pas trop différents de Φ_2 , il n'y a aucun inconvénient à ramener les forces calculées à ces flux. La seule chose à craindre par suite de l'extension des formules à la *totalité* du circuit magnétique est une *modification* des fuites.

Dans le cas de la formule 7) la force pour le flux Φ_2 et pour l'entrefer x_0 est (1) :

$$F = 2\pi(n_1 I_1 + n_2 I_2)^2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)_{\Phi_2, x = x_0}$$

qui, ramenée au flux *actuel* Φ'_2 , en tenant compte des unités et appliquée au bout du fléau, devient :

$$F = \frac{2\pi}{981} \frac{82}{590} \frac{1}{100} \frac{\Phi_2'^2}{\Phi_2^2} (n_1 I_1 + n_2 I_2)^2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)_{\Phi_2, x = x_0} \quad (12)$$

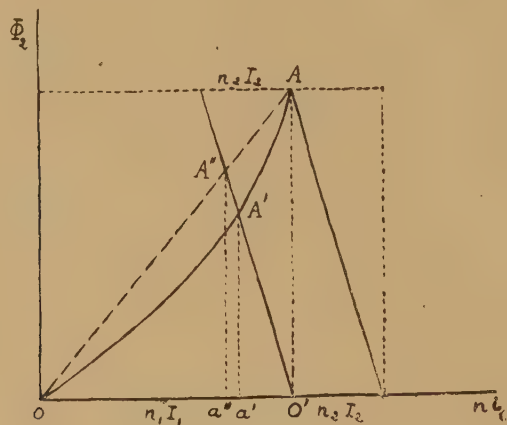


Fig. 44.

Il faudrait bien se garder d'écrire simplement :

$$F = 2\pi(n_1 I_1)^2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)_{\Phi_2, x = x_0}$$

car $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)_{\Phi_2}$ peut être différent de $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)_{\Phi_2'}$.

Pour établir cette formule, on a supposé en effet que la perméabilité était constante, ce qui revient à admettre que la caractéristique suivie est la droite OA (fig. 44), c'est-à-dire que $\mathcal{L}$ est indépendant de Φ_2 . Il en résulte que cette application de la formule donne un effort qui correspondrait à l'état figuré par le point A''. En passant au point réel A', le flux total passe de A''a'' à A'a', l'effort doit donc être divisé par le rapport des carrés de ces deux quantités. On a donc :

$$F = 2\pi(n_1 I_1)^2 \left(\frac{A'a'}{A''a''} \right)^2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)_{\Phi_2, x = x_0} \quad (12')$$

ce qui suppose connue pour faire cette construction la caractéristique totale principale du circuit magnétique pour $x=0$.

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier l'identité des formules 12) et 12') (2).

(1) Rappelons que nous n'avons pas à nous inquiéter de l'hystérésis puisque nous raisonnons avec des courbes qui correspondent au lieu des sommets des cycles.

(2) Cette dernière formule dispense de l'étude de Φ_2 à $n_1 I_1$ constants. Nous l'avons donc employée dans les cas où nous avons des doutes sur l'exactitude de la courbe b).

Nous nous sommes servi des formules 11) et 12) ou 12') en rapprochant les résultats — qui théoriquement sont les mêmes — afin de nous rendre compte des erreurs introduites dans les calculs, surtout dans la détermination des tangentes aux courbes. Nous avons déterminé ces tan-

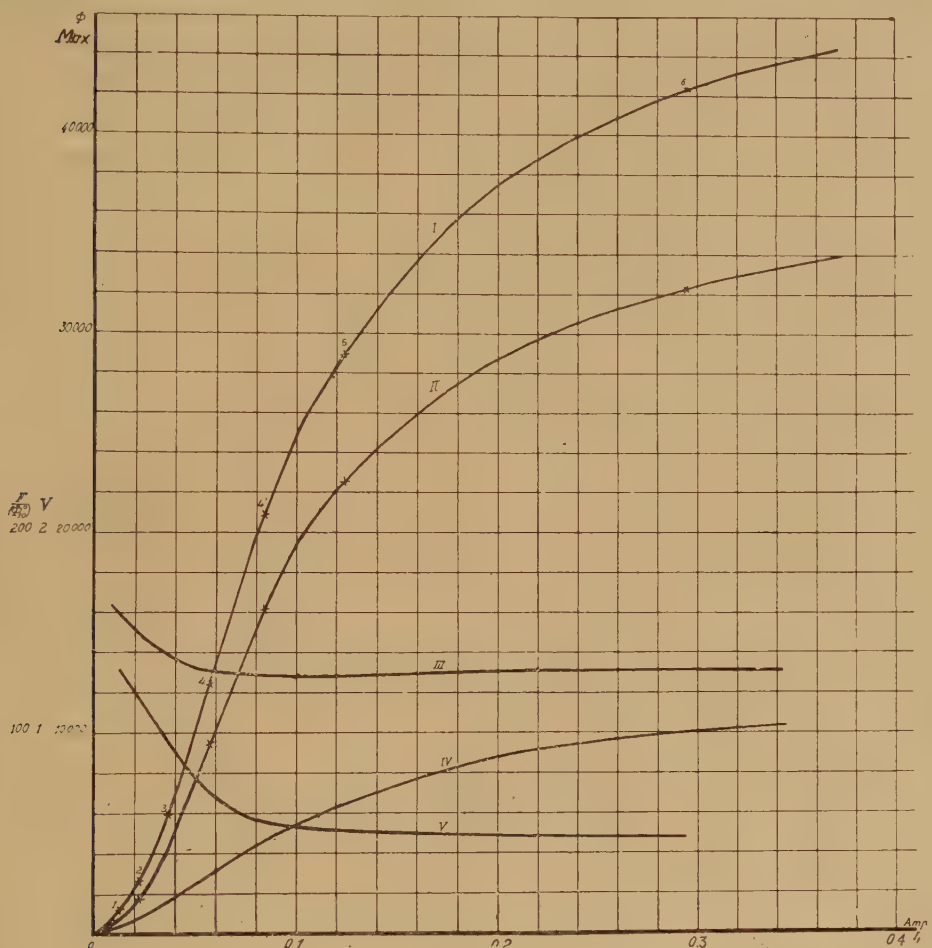


Fig. 45.

gentes *graphiquement* ; ce procédé nous a paru supérieur à celui consistant à rechercher l'équation de la courbe passant par trois ou quatre points. Les coordonnées de chaque point ne sont pas, en effet, parfaitement connues, mais doivent être corrigées à l'aide du tracé de la courbe (1) ; dans ces conditions, si l'on prend des points trop rapprochés pour appliquer cette méthode, on risque d'introduire une erreur sur la concavité et si l'on prend des points éloignés, la courbe obtenue n'est plus osculatrice à celle relevée.

(1) Ces corrections n'ont besoin de porter que sur une des coordonnées, celle qui est commune aux deux courbes, c'est-à-dire l'entrefer. Nous nous sommes servi du tracé de $n_0 I_2$ en fonction de x qui se fait d'une façon très sûre pour rectifier les points de la courbe $\mathcal{X}$ en fonction de x .

30. — *Vérification des formules de l'attraction de l'électro-aimant. Exposé des résultats.* — Les courbes I et II (fig. 45) représentent les variations de Φ_2 et de Φ_{10} , correspondant à l'entrefer zéro, en fonction du courant d'excitation principal I_1 , courbes que nous avons relevées en mesurant les flux dans chaque série de pesées à $n_1 I_1$ constants, au nombre d'une soixantaine. Les points 1, 2, 3, 4, 5, sont ceux qui correspondent à une vérification complète des formules de l'attraction ; pour le point 6, il n'a été fait qu'un rapprochement des résultats et une étude des fuites à flux total constant, et pour le point 4' une étude des fuites seules.

La courbe III est celle du coefficient d'Hopkinson $\frac{\Phi_2}{\Phi_{10}}$, rapport du flux total dans le fer au flux utile. Cette courbe présente un minimum qui correspond sensiblement, comme il est logique de s'y attendre, au maximum de perméabilité. Toutefois, il faut remarquer qu'à partir de ce minimum la courbe est sensiblement en palier pour toute l'étendue du coude, ce qui conduit à une caractéristique non rectiligne pour le flux de fuites, $\Phi_2 - \Phi_{10}$ (courbe IV) et entraîne les tangentes aux courbes I, II et IV, pour une même excitation, à se couper pour cette région sur l'axe des abscisses (1).

Les résultats de toutes les séries de pesées à excitation constante sont résumés par la figure 46 qui représente en fonction de I_1 la famille des courbes pour les entrefers compris entre 0 et 0^{mm},75 de la quantité $\frac{F}{(\Phi_{10}^0)^2}$, Φ_{10}^0 étant le flux utile correspondant à l'entrefer zéro pour la même excitation. La figure 47, faite à plus grande échelle, donne ces mêmes courbes pour les entrefers de 0,10 à 2^{mm},50. Nous avons dit que cette façon d'enregistrer les résultats courants permettait, grâce au tracé continu des courbes, d'avoir des valeurs beaucoup plus exactes pour les points étudiés particulièrement.

La courbe correspondant à l'entrefer zéro (fig. 46), que nous avons reportée en V sur la figure 45, présente un aspect hyperbolique alors que théoriquement elle devrait être une droite horizontale, si la répartition de l'induction dans l'entrefer était constante indépendamment de sa valeur. Nous avons dit au paragraphe 22 comment Threlfall expliquait l'augmentation de la force réduite $\frac{F}{(\Phi_{10}^0)^2}$ pour les faibles inductions lorsque les surfaces de l'entrefer n'étaient pas rigoureusement parallèles et comment ces imperfections disparaissaient avec la saturation.

Nous voyons que la courbe se raccorde avec son asymptote (qui serait horizontale s'il n'y avait pas une erreur due à la diminution de l'entrefer résiduel dans la mesure des très grands flux), pour des excitations comprises entre 0^A,10 et 0^A,11, ce qui correspond à des flux dans l'entrefer de

(1) Nous voyons là une vérification nouvelle du peu d'importance que prend l'origine des courbes.

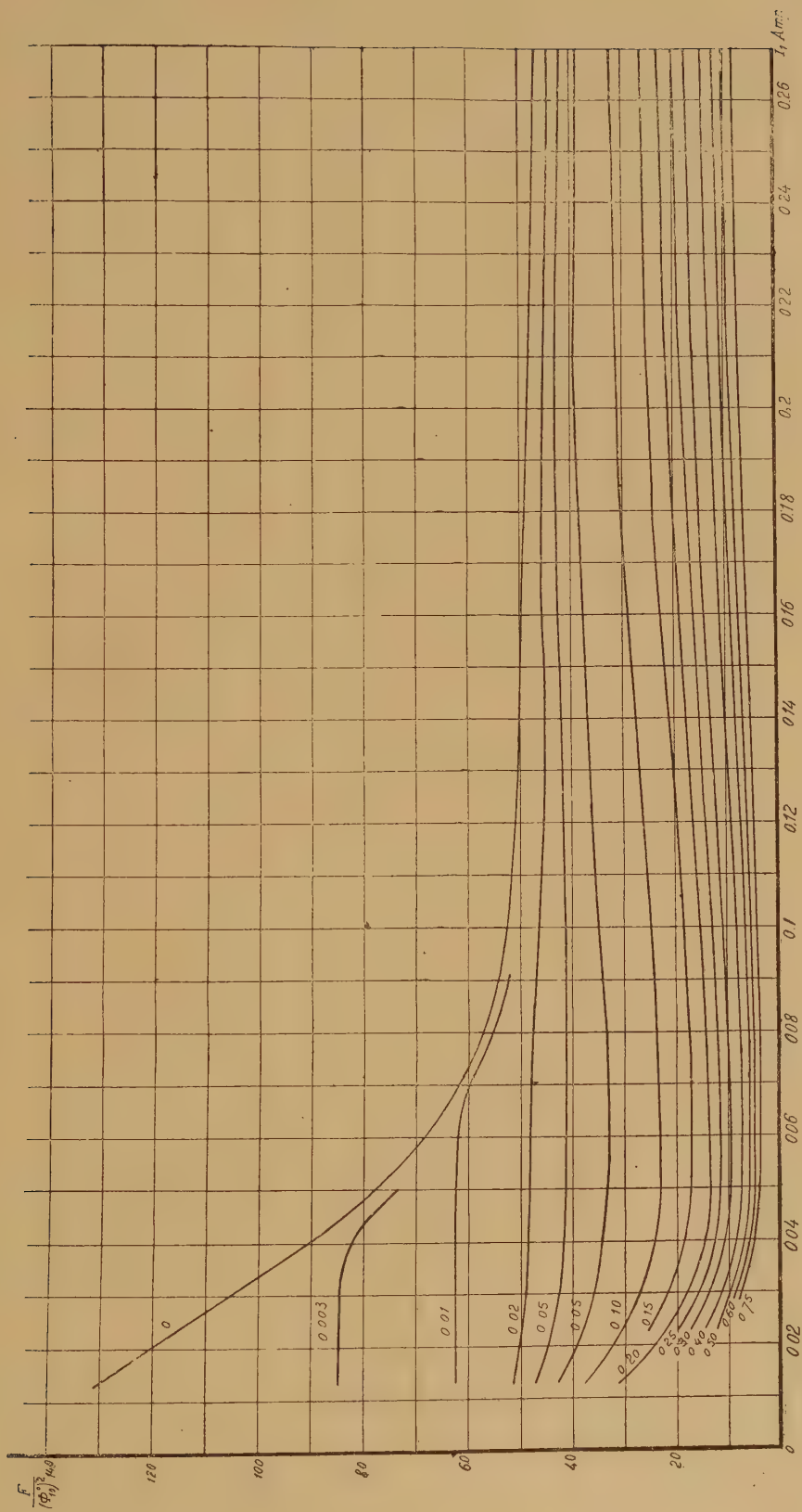


Fig. 46.

l'ordre de 19 000 à 21 000 Maxwells, c'est-à-dire à des inductions moyennes de 6 100 à 6 750 gauss.

Bosanquet avait fixé 5 000 gauss comme limite inférieure d'exactitude

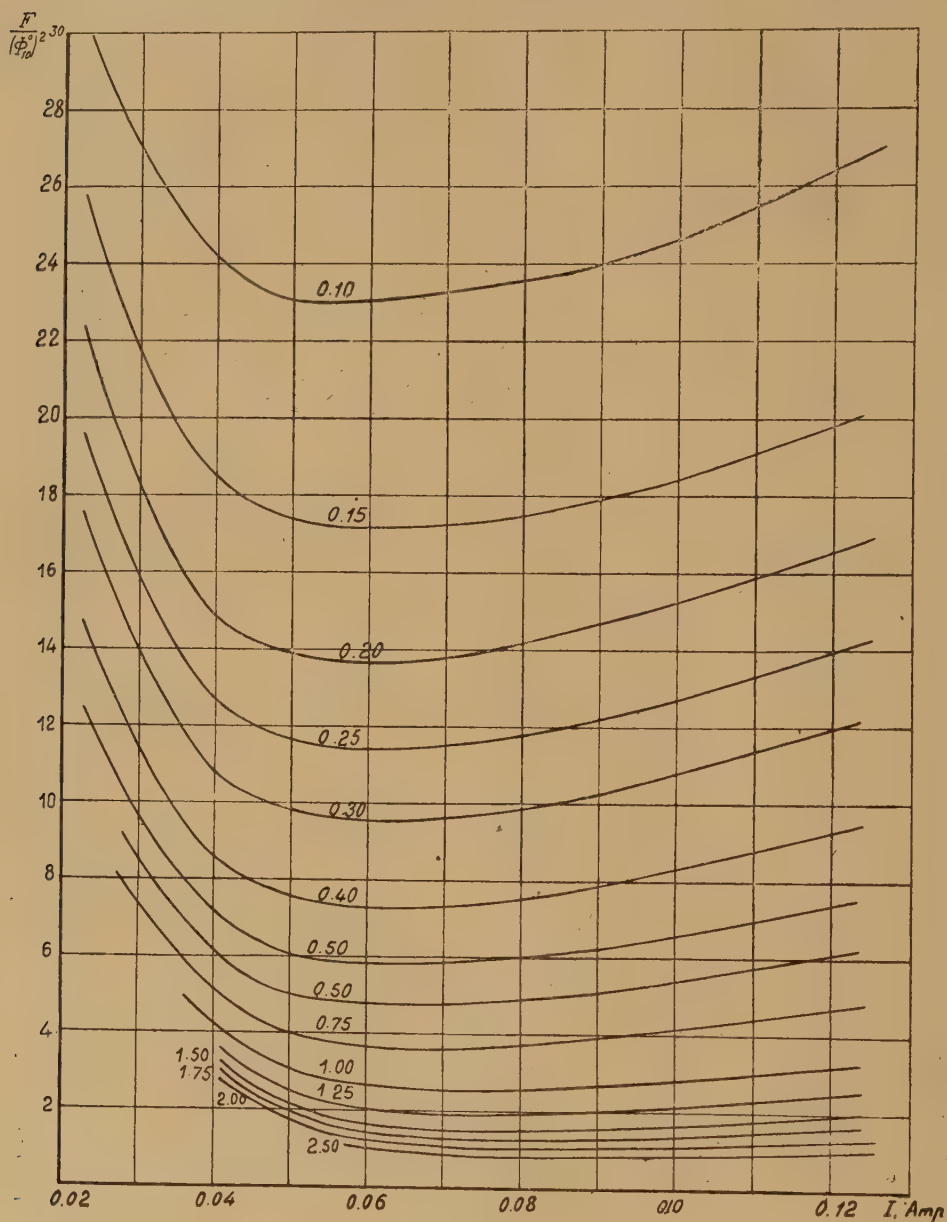


Fig. 47.

de la formule de Maxwell, c'est-à-dire, comme le fait remarquer Threlfall, comme limite de l'influence des irrégularités de l'entrefer; cela prouve que cette limite n'est pas absolue et dépend de ces irrégularités.

Dès que l'entrefer n'est plus nul, pour les valeurs $0^{\text{mm}},003$ et $0^{\text{mm}},01$, les

courbes sont d'abord horizontales et se raccordent ensuite à des parallèles à la courbe de l'entrefer zéro, ce qui montre que les irrégularités de répartition de l'induction sont déjà presque effacées ; malheureusement nous n'avons pas pu aller bien loin dans le relevé de ces courbes à cause de la difficulté à réaliser ces entrefers.

A partir de $0^{\text{mm}},02$ disparaît toute influence de ces irrégularités. A partir de ce moment, toutes les courbes présentent bien un minimum mais qui vient de ce que nous avons rapporté les forces au flux pour l'entrefer nul et non aux flux réels — d'où influence de la variation des fuites et surtout de l'inclinaison de la caractéristique totale principale pour $x = 0$.

Nous allons donner maintenant les résultats relatifs à la vérification des formules de l'attraction. Nous avons préféré, plutôt que de donner directement les courbes de $n_2 I_2$ et $\mathcal{E}$ en fonction de x relevés dans ce but et réduites à trop faibles échelles, donner les coordonnées des points, corrigées d'après un tracé de grandes dimensions, afin de permettre au lecteur de pouvoir les reconstituer utilement.

1^{er} point.

$$I_1 = 0^{\text{A}},01285, \quad n_1 I_1 = 49^{\text{AT}},4.$$

Ampères-tours moyens par cm. pour $x = 0$: 0,703. Champ moyen : 0^{gauss},883.

Flux pour $x = 0$: $\Phi_2 = 1222^{\text{Max.}}$, $\Phi_{10} = 766^{\text{Max.}},3$, $v = 1,594$.

Induction moyenne dans l'entrefer pour $x = 0$: 245,6 gauss.

Relevé des courbes de $n_2 I_2$ et de $\mathcal{E}$ en fonction de l'entrefer à flux total constant.

$n_2 I_2$ AT	Entrefers x mm	Perméance totale $\mathcal{E}$ Maxwells par Gilbert (1)	Flux utile Φ_{10} Maxwells	$n_2 I_2$ (suite)	x	$\mathcal{E}$	Φ_{10}
—	—	—	—	—	—	—	—
0	0	19,789	766,3	1,66	0,0853	19,146	
0,20	0,004	19,709		1,913	0,1032	19,050	
0,293	0,0069	19,672		2,26	0,1284	18,923	
0,44	0,0124	19,614		2,60	0,15395	18,800	
0,574	0,01875	19,562		3,04	0,1888	18,642	687,8 *
0,708	0,0257	19,509		6,78	0,72		580
0,928	0,0382	19,424		8,06	1,07		538,5
1,16	0,0523	19,335		9,35	1,53		504,4
1,415	0,069	19,238		11,34	2,65		460
				12,2	3,85		409,6

(1) La précision donnée à ces résultats est évidemment exagérée lorsqu'on les considère en valeurs absolues, étant données les erreurs systématiques dont sont entachées les mesures. Ils ne prennent cette précision que les uns par rapport aux autres, ce qui permet de tracer les courbes sans ambiguïté. Les erreurs systématiques n'ont d'influence que sur les échelles de ces courbes.

* Limite des entrefers corrigés.

Les courbes pour ce point, ainsi que pour le suivant, ont été relevées directement sans compensateur et sans micromètre à miroir, aussi les résultats sont-ils moins sûrs que pour les trois suivants. Le nombre de points relevés est aussi insuffisant pour avoir un tracé très sûr.

Nous parlerons, dans le paragraphe suivant, en les comparant entre elles des caractéristiques du flux utile et de la notion d'origine virtuelle.

Pour ce point nous n'avons pas à nous inquiéter de la correction signalée dans la remarque 2 du paragraphe 19 car, la caractéristique totale principale pour $x=0$ étant sensiblement rectiligne depuis l'origine, toutes les parties du fer suivent des caractéristiques parallèles entre elles. Nous pouvons donc passer directement aux résultats. Les forces mesurées ont été corrigées à l'aide de la méthode indiquée plus haut.

Entre- fers x_0 mm	Flux Φ_2 Max.	$\left(\frac{\partial n^1}{\partial x}\right) \Phi_{2,x=x_0}$ AT par cm	$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right) \Phi_{2,x=x_0}$ Max par Gil par cm	Forces me- surées grs.	Forces cal- culées par la formule 11 F_{11}	Forces cal- culées par la formule 12 F_{12}	Forces me- surées — F_{11}	Forces me- surées — F_{12}	Forces me- surées — 0,5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0	1222	542	225	7,722	7,12	7,40	0,602	0,322	7,222
0,003	1217,5	370	145	4,984	4,82	4,76	0,164	0,224	4,484
0,01	1212	237	96,8	3,662	3,19	3,17	0,472	0,492	3,162
0,02	1205	201	78,6	3,033	2,56	2,572	0,473	0,461	2,533
0,03	1198,2	180	70	2,774	2,27	2,28	0,504	0,494	2,274
0,05	1186,7	163	61,7	2,513	2,015	1,995	0,498	0,518	2,013
0,10	1161,5	141	52,8	2,222	1,67	1,687	0,552	0,535	1,722
0,15	1141,5	130	47,5	2,028	1,486	1,506	0,542	0,522	1,528
0,20	1123,3	122	43	1,85	1,35	1,34	0,50	0,51	1,35

L'examen de ces résultats nous montre qu'à partir de $0^{\text{mm}},01$ la différence entre les forces mesurées et les forces calculées est *sensiblement constant*; cela nous permet de conclure que les résultats calculés sont *exacts* et que ce sont les pesées qui sont entachées d'une erreur systématique par excès de $0^{\text{er}}, 5$, due à un mauvais équilibrage de la balance ou plutôt à la paresse des roulements. Nous avons, du reste, signalé que la sensibilité de la balance était de l'ordre de cette quantité.

On ne peut pas interpréter ces résultats autrement car, comme nous le verrons, lorsque les forces calculées diffèrent des forces mesurées, elles en diffèrent par un *rapport constant*, ce qui est facile à prévoir.

Par conséquent nous sommes en droit de dire que les formules 7) et 10) appliquées à la totalité du circuit magnétique sont *exactes* à partir d'un entrefer double de $0^{\text{mm}},01$. La plus grande différence constatée est, pour $0^{\text{mm}},10$, de 3 % environ.

Nous ferons remarquer la valeur à attacher à ces résultats, étant données les très faibles inductions (inférieures à 245 gauss) qui n'ont jamais été

étudiées, même par Threlfall. Pour des pesées aussi petites la correction à l'aide de la courbe moyenne est de toute nécessité. Nous ferons remarquer également les très faibles différences existant entre les résultats des formules 11) et 12) qui ne dépassent que très rarement 1 %.

Pour ce qui est des entrefers zéro et $0^{\text{mm}},003$, il nous est beaucoup plus difficile de nous prononcer. Le raccordement des courbes relevées de n_2I_2 et de $\mathcal{E}$ avec l'origine doit se faire à l'estime, étant donné qu'à ce moment nous n'avions ni compensateur ni micromètre à miroir; aussi la détermination des tangentes est-elle déplorable. L'examen des résultats pour zéro montre que les formules semblent ici pouvoir s'appliquer, cela est à noter par rapport à ce que nous verrons pour les points suivants. Pour $0^{\text{mm}},003$ les résultats sont un peu moins exacts, la force calculée paraissant un peu trop grande.

2° point.

$$I_1 = 0^{\text{A}},0227, \quad n_1I_1 = 87^{\text{AT}},27.$$

Ampères-tours moyens par cm. pour $x=0$: 1,2415. Champ moyen : 4,56 gauss.

Flux pour $x=0$: $\Phi_2 = 2674$ Max., $\Phi_{10} = 1804$ Max., $v = 1,482$.

Induction moyenne dans l'entrefer pour $x=0$: 578 gauss.

Relevé des courbes de n_2I_2 et de $\mathcal{E}$ en fonction de l'entrefer à flux total constant.

n_2I_2 AT	Entrefers x mm	Perméance totale $\mathcal{E}$ Max. par Gil.	Flux utile Φ_{10} Maxwells	n_2I_2 (Suite)	x	$\mathcal{E}$	Φ_{10}
—	—	—	—	—	—	—	—
0	0	24,510	1804	11,40	0,3104	21,744	
0,7325	0,00735	24,308		12,35	0,370	21,471	
0,982	0,0103	24,237		13,54	0,430	21,218	
1,434	0,0183	24,113		14,90	0,510	20,935	
1,902	0,0271	23,987		16,28	0,60	20,656	1397
2,380	0,0368	23,860		18,10	0,73		
3,052	0,0510	23,681		19,33	0,84		1325,5 *
4,212	0,07685	23,381		23,60	1,34		1198
5,208	0,10115	23,129		25,13	1,615		
6,638	0,1397	22,777		27,93	2,165		1100
8,310	0,1948	22,379	1584,5	30,62	2,90		1030,5
9,520	0,241	22,099		32,88	3,72		978

Nous donnons ci-dessous la comparaison des forces calculées et des forces mesurées. Nous avons diminué les forces directement mesurées de $0^{\text{er}},5$ pour avoir la vraie valeur des forces agissantes, comme nous l'a montré le point précédent.

* Limite des entrefers corrigés

Entrefers x_0 mm	Flux Φ_2 Maxwells	$\left(\frac{\partial nI}{\partial x}\right)_{\Phi_2, x=x_0}$ AT par cm	$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}\right)_{\Phi_2, x=x_0}$ Max. par Gil. par cm	Forces mesurées — 0,5 grammes	Forces calculées par les formules	
					11	12'
0	2674	1260	370	37,4	36,15	37,9
0,003	2661	988	270	27,09	28,03	27,65
0,01	2640	698	188,5	19,77	19,8	19,32
0,02	2619,5	568	152	15,66	15,61	15,57
0,03	2597,5	510	136	13,84	13,78	13,82
0,05	2561	463	122	11,86	12,17	12,24
0,10	2482	395	98	9,46	9,77	9,68
0,15	2420	333	79,5	7,9	7,815	7,76
0,20	2372,5	285	65,5	6,77	6,44	6,34
0,25	2335	248	55,8	5,88	5,42	5,35
0,30	2300,5	238	50,5	5,20	5,05	4,82
0,40	2242	203	43,5	4,25	4,09	4,11
0,50	2194	169	35,4	3,55	3,26	3,29

Pour ce point, nous ferons à peu près les mêmes observations que pour le précédent quant à la vérification des formules de l'attraction. A partir de 0^{mm},01 les tangentes sont bien déterminées car on est en possession, dès cet entrefer, de courbes bien définies ; cependant nous n'avons pas encore assez de points, surtout pour les grands entrefers, pour avoir un tracé très sûr.

Pour les entrefers zéro et 0^{mm},003, les forces calculées, d'après un raccordement à l'estime des courbes avec l'origine, correspondent assez bien à la réalité ; les formules doivent donc pouvoir être applicables dans ce cas.

Nous ferons remarquer qu'après avoir eu une vérification sensiblement exacte, à partir de 0^{mm},20, la divergence entre les forces mesurées et les forces calculées s'accroît lorsque l'entrefer augmente bien que nous ayons fait la contre épreuve de la formule 11) par la formule 12'). Cette divergence est due certainement à ce que nous comparons des forces mesurées à $n_1 I_1$ constants avec celles calculées d'après une déformation à flux total constant, en nous éloignant trop des conditions de celle-ci, étant donnée la rapide variation du coefficient d'Hopkinson. Il est bon de se demander aussi si nous sommes en possession des vraies pesées pour des valeurs aussi faibles.

Nous ferons remarquer aussi que, pour ce point, il y a lieu de se demander si les forces calculées ne sont pas systématiquement trop grandes, à cause de la concavité de la caractéristique totale principale pour $x=0$ tournée vers les flux positifs. Cette courbe en effet doit servir d'indicatif pour savoir s'il y a lieu de tenir compte de la remarque 2 du paragraphe 19. Si la région comprise entre les valeurs de Φ_2 et de Φ_{10} est rectiligne, il n'y a évidemment pas lieu de s'en préoccuper. Dans le cas présent,

malgré la concavité très nette de la courbe en ce point, la vérification des formules pour les premiers entrefers est cependant très bonne. Cela est peut-être dû à ce que cette concavité est en partie liée à la variation rapide du coefficient d'Hopkinson. Il vaut mieux s'en rapporter à une raison que nous avons développée, dans le paragraphe suivant, relativement à l'étendue de la zone inactive en fonction du coefficient d'Hopkinson.⁽¹⁾

3^e point.

$$I_1 = 0^{\wedge},0367, \quad n_1 I_1 = 141^{\wedge},1.$$

Ampères-tours moyens par cm. pour $x=0$: 2,009. Champ moyen : 2,523 gauss.

Flux pour $x=0$: $\Phi_2 = 5960$ Max., $\Phi_{10} = 4310$ Max., $v = 1,383$.

Induction moyenne dans l'entrefer pour $x=0$: 1380 gauss.

Relevé des courbes de $n_2 I_2$ et de $\mathcal{E}$ en fonction de l'entrefer à flux total constant.

$n_2 I_2$ AT	Entrefers x mm	Perméance totale $\mathcal{E}$ Max. par Cil	Flux utile Φ_{10} Maxwells	$n_2 I_2$ (Suite)	x	$\mathcal{E}$	Φ_{10}
—	—	—	—	—	—	—	—
0	0	33,7774	4310	24,17	0,2555	98,837	
0,564	0,00325	33,6429		26,08	0,2868	508	3697
0,742	0,0036	6007		28,45	0,3323	109	
0,996	0,0043	5407		30,55	0,378	27,765	
1,524	0,0064	4165		32,01	0,4115	531	3502
2,495	0,0110	1905		35,90	0,5055	26,926	
3,543	0,0172	32,9189		40,40	0,6251	258	3310
4,478	0,0233	738		44,50	0,738	25,678	
5,732	0,0325	458		47,89	0,903		
6,695	0,0397	247		52,03	1,095		2990
7,620	0,0474	046		57,44	1,40		
9,677	0,0656	31,609		6 ,89	1,71		2718
12,045	0,09075	120		65,87	2,07		
13,47	0,1065	30,833		68,62	2,35		
15,37	0,129	459	3937	71,47	2,68		2452
17,35	0,1548	078		74,87	3,14		
18,78	0,174	29,809		79,13	3,85		2240
20,82	0,2042	434					
22,385	0,2279	152					

*

Ces courbes relevées à l'aide du compensateur et du micromètre à miroir sont parmi les plus exactes que nous ayons obtenues, car pour ce point, les flexions du fléau sont encore négligeables et ne viennent pas

* Limite des entrefers corrigés.

fausser les résultats. Jusqu'à l'entrefer $0^{\text{mm}},2042$ l'écart entre la valeur corrigée des entrefers d'après le tracé de la courbe et la valeur mesurée directement est rarement supérieur à $0,3\mu$; il ne dépasse, pour aucun point, $0,5\mu$. Beaucoup de points sont même rigoureusement sur la courbe. Au delà de cet entrefer, le tracé est plus incertain, mais néanmoins satisfaisant. La sensibilité dans la détermination des points est d'autant plus grande que la caractéristique totale principale est plus inclinée; c'est ce qui explique aussi la perfection de cette courbe.

Nous ferons remarquer qu'à partir de ce point les courbes ne semblent pas partir de l'origine. Cela est dû à l'écrasement des billes qui sépare le zéro correspondant à ces mesures — c'est-à-dire à la balance vide — du zéro des pesées où le décollement a lieu simultanément dans les deux entrefers. Le phénomène est trop faible pour être directement mesurable, mais nous estimons la différence à environ 2μ . Les courbes partent normalement de l'origine mais au moment du décollement de l'entrefer inférieur elles présentent un point anguleux et ce n'est qu'à partir de ce point que l'on doit les considérer pour le calcul des attractions. Les entrefers x_0 du tableau ci-dessous sont donc comptés à partir de cette nouvelle origine.

Entrefers x_0 mm	Flux Φ_2' Maxwells	$\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{\Phi_2 x=x_0}$ AT par cm	$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}\right)_{\Phi_2 x=x_0}$ Max. par Gil. par cm	Forces mesurées — 0gr,5 grammes	Forces calculées par les formules	
					11	12'
0	5960	3200	725	176,5	204	194,3
0,003	5932	2610	602	154	165	161,4
0,01	5848	1907	432	115,2	117,1	114
0,02	5754	1510	338	89,8	89,8	89
0,03	5678	1340	296	77,35	77,5	77,2
0,05	5553	1155	248	63,9	64	63,7
0,10	5299	905	178	45,85	45,65	45,3
0,15	5108	763	143	35,25	35,8	35,1
0,20	4931	672	120,5	28,67	29,6	29,1
0,25	4812	620	111	24,58	25,8	26,5
0,30	4697	550	88,5	21,14	21,8	20,78
0,40	4531	439	69,5	16,77	16,21	15,9
0,50	4410	399	61,5	14,03	13,95	13,85
0,60	4300	373		12,16	12,38	
0,75	4154	350		10,24	10,88	

L'examen de ces résultats montre encore une vérification très exacte des deux formules pour les entrefers compris entre $0^{\text{mm}},01$ et $0^{\text{mm}},20$. Au delà il y a une divergence qui est due à la moins bonne détermination de la courbe, et aussi à la variation encore très rapide du coefficient d'Hopkinson pour $x=0$, qui fait que l'on s'écarte très vite des conditions dans

lesquelles la comparaison est légitime. Nous avons encore employé la formule 12') à titre de contre épreuve.

Pour le collage et l'entrefer 0^{mm},003, les forces calculées sont beaucoup plus grandes que celles mesurées. Il est certain, d'après l'examen de la courbe de l'entrefer zéro sur la figure 46, que l'hypothèse de Pérot n'est pas satisfaite; peut-être y a-t-il une liaison entre le rapport des forces calculées et mesurées et la tangente à cette courbe.

Il n'y a pas lieu pour ce point de faire porter une correction sur les forces calculées.

4^e point.

$$I_1 = 0^{\circ},0571, \quad n_1 I_1 = 219^{\text{at}},4.$$

Ampères-tours moyens par cm. pour $x=0$: 3,143. Champ moyen : 3,923 gauss.

Flux pour $x=0$: $\Phi_2 = 12500$ Max., $\Phi_{10} = 9520$ Max., $v = 1,3105$.

Induction moyenne dans l'entrefer pour $x=0$: 3051 gauss.

*Relevé des courbes de $n_2 I_2$ et $\mathcal{L}$ en fonction de l'entrefer
à flux total constant.*

$n_2 I_2$ AT	Entrefers x mm	Perméance totale $\mathcal{L}$ Max.parGil.	Flux utile Φ_{10} Maxwells	$n_2 I_2$ (Suite)	x	$\mathcal{L}$	Φ_{10}
—	—	—	—	—	—	—	—
0	0	45,5788	9520	33,73	0,1300	39,5053	8595
0,814	0,0039	4103		36,47	0,1449	082	
0,996	0,0048	3728		39,5	0,1624	38,624	
1,195	0,0057	3319		42,4	0,1797	197	
1,495	0,0069	2703		46,13	0,2034	37,660	8258
1,975	0,0093	1722		48,3	0,2180	355	
2,558	0,011	0535		51,38	0,2395	36,930	
3,232	0,0124	44,9171		53,59	0,2554	631	
4,317	0,0148	6993		56,81	0,2789	204	
6,02	0,0190	3616		59,3	0,2977	35,880	7860
8,195	0,0246	43,9376			...		
9,79	0,0289	6319		59,3	0,3045		
11,315	0,0338	3435		61,21	0,3206		
13,845	0,0418	42,8733		64,72	0,3493		
16,9	0,0526	42,319		67,75	0,3758		
19,65	0,0634	41,8322		71,02	0,4056		7515
22,41	0,0751	3547		74,13	0,4336		
24,33	0,0837	029		78,33	0,4780		
26,97	0,0957	40,5893		83,23	0,5335		
29,98	0,1107	0994					

$n_2 I_2$ (Suite)	x	$\mathcal{Q}$	Φ_{10}	$n_2 I_2$ (Suite)	x	$\mathcal{Q}$	Φ_{10}
—	—	—	—	—	—	—	—
88,16	0,5935		7065	133,85	1,50		
93,26	0,6620			145,7	1,882		5461
98,34	0,737			154,7	2,286		
104,3	0,8335			163,35	2,695		4980
112,4	0,082		6340	170,55	3,141		
120,55	1,160			180,05	3,80		4540
127,45	1,325						

Ces courbes ont été relevées d'une façon aussi précise que les précédentes malgré les corrections de flexion assez importantes jusqu'à l'entrefer $0^{\text{mm}},4056$; elles sont même beaucoup mieux définies pour les grands entrefers, étant donné le plus grand nombre de points relevés. Les déplacements à faire subir aux points pour les amener à être sur les courbes sont encore plus faibles, inférieurs à $0,3\mu$.

Le point anguleux qui correspond au décollement du contact inférieur est parfaitement défini, il a lieu pour l'entrefer $0^{\text{mm}},0093$, valeur confirmée par la courbe de Φ_2 en fonction de l'entrefer à excitation constante.

Toutefois, il nous faut signaler une petite incorrection dans le tracé des courbes entre les entrefers $0^{\text{mm}},2977$ et $0,3206$ où les branches obtenues ne se raccordent pas. L'excitation a dû varier imperceptiblement d'un jour à l'autre et peut-être même l'appareil jouer, étant donnée la très forte chaleur de l'époque à laquelle nous avons relevé ces courbes. Cela n'a aucune influence sur l'emploi de la formule 11) puisque ce sont seules les tangentes à la courbe qui importent, mais cela nous interdit l'usage des formules 12) et 12') en fonction de l'excitation au delà de ce point.

Bien que le point anguleux ait lieu à $0^{\text{mm}},0093$, le déplacement de zéro, mesuré directement par la distance entre les positions de l'armature avec la balance vide ou chargée au voisinage de l'équilibre, n'est que de $0^{\text{mm}},005$. C'est naturellement à partir de cette dernière origine que nous avons compte les entrefers pour le calcul des attractions puisqu'elle correspond au réglage du zéro au cours de la mesure des pesées.

* Limite des entrefers corrigés.

Entrefers x_0 mm	Flux Φ_2' Maxwells	$\left(\frac{\partial nI}{\partial x}\right)_{\Phi_2, x=x_0}$	$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}\right)_{\Phi_2, x=x_0}$	Forces mesurées — 0gr,5 grammes	Forces calculées par les formules	
		AT par cm	Max. par Gil. par cm		11	12
—	—	—	—	—	—	—
0 mesures	12300					
0 pesées	12440	4330	922	643	576,25	598
0,01	12205	4070	824	562,2	520	530
0,02	11933	3573	700	434,5	436	435,8
0,03	11720	3170	590	372	373	372,5
0,04	11530	2900	522	329,5	330	328
0,05	11370	2700	477	298,5	299	298,2
0,075	11020	2310	390	246,5	240	240,6
0,10	10720	2080	334	207,9	204,8	204
0,15	10215	1740	261	155,35	153,35	155,6
0,20	9768	1515	212	123,6	123,6	123,1
0,25	9420	1375	184	102,95	104,3	104,8
0,30	9140	1250		86,5	89,3	
0,35	8900	1160		77,5	78,6	
0,40	8695	1070		65,85	69,25	
0,50	8320	900		52,3	53,3	
0,60	8021	775		43	42,7	
0,75	7693	660		33,2	33,43	
1,00	7287	523		24,05	23,78	
1,25	6960	425		18,62	17,6	
1,50	6700	355		15,26	13,6	
1,75	6560	320		13,27	11,8	
2,00	6442	270		11,46	9,6	

L'examen de ce tableau montre, pour ce point, une vérification presque parfaite des formules 11) et 12) depuis 0^{mm},02 jusqu'à 1^{mm},00. Nous ne sommes plus sensiblement gêné par la variation du coefficient d'Hopkinson ; c'est ce qui explique que l'on puisse calculer correctement les attractions jusqu'à ce dernier entrefer. Au delà nous nous écartons encore trop des conditions de la déformation à flux total constant pour que la comparaison soit légitime ; d'autre part il est possible que la grande inclinaison du fléau puisse troubler les mesures des forces encore très petites.

Nous ferons remarquer que les différences entre les forces calculées et mesurées suivent des ondulations qui s'étendent sur plusieurs entrefers successifs et qui correspondent à une légère erreur sur la concavité des courbes utilisées pour les calculs. Ajoutons que la caractéristique totale principale étant rectiligne il n'y a aucune correction à faire subir aux forces calculées.

Pour l'entrefer 0^{mm},01 la force calculée est légèrement inférieure à celle mesurée. Pour l'entrefer zéro le phénomène est très complexe ; la vérifica-

tion très exacte des formules pour les faibles entrefers à partir de $0^{\text{mm}},02$ nous montre que le déplacement de zéro que nous avons mesuré directement est bien celui qui convient aussi pour les calculs. Que se passe-t-il donc exactement entre $0^{\text{mm}},005$ et $0,0093$? Nous avons calculé l'effort pour l'entrefer zéro figurant au tableau en prenant les tangentes aux courbes après le point anguleux, c'est-à-dire en supposant qu'il y a eu décollement simultané des deux entrefers.

Au contraire, nous pouvons prendre la tangente à la courbe de $\mathcal{E}$, par exemple, avant le point anguleux ; ce qui suppose l'entrefer du haut seul déformable, la rotation de l'armature ayant lieu autour d'une charnière formée par les points de contact de l'entrefer inférieur, que nous pouvons supposer située en son milieu, ce qui supprimera toute variation de perméance pour cet entrefer. Nous trouvons $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = 442$.

Dans ce cas, la force exercée sur l'armature dans l'entrefer du haut s'applique à l'extrémité d'un bras de levier de $82 + 74^{\text{mm}}$. La force en bout de fléau équilibrant ce couple est de 598^{gr} .

Nous trouvons rigoureusement le même chiffre que par l'autre méthode, ce qui vérifie parfaitement le raisonnement que nous avons fait plus haut relativement au jeu des roulements à billes (§ 24).

Nous sommes donc obligé de constater que les formules 11) et 12) ne s'appliquent pas pour l'entrefer zéro. Le calcul donne ici une force inférieure. Pour le point précédent, nous avons obtenu un résultat contraire, mais sous toute réserve car les courbes n'étaient pas aussi bien définies qu'à présent.

Il est intéressant de voir ce qu'aurait donné la formule de Maxwell (1) :

$$F = \frac{\Phi_{10}^2}{4\pi S} \frac{1}{981} \frac{74}{390} = \frac{9520^2}{4\pi \cdot 3,12} \frac{1}{981} \frac{74}{390} = 447^{\text{gr}};$$

résultat encore bien inférieur aux forces calculées par notre méthode.

En résumé, il semble donc que pour les faibles entrefers le calcul donne des résultats inférieurs à l'expérience ; ce qui montrerait que l'hypothèse de Pérot devient insuffisante.

5° point.

$$I_1 = 0^{\text{A}},12385, \quad n_1 I_1 = 476^{\text{Ar}},1.$$

Ampères-tours moyens par cm. pour $x = 0$: 6,78. Champ moyen : 8,52 gauss.

Flux pour $x = 0$: $\Phi_2 = 28900 \text{ Max.}$, $\Phi_{10} = 22530 \text{ Max.}$, $v = 1,285$.

Induction moyenne dans l'entrefer pour $x = 0$: 7 225 gauss.

(1) Nous prenons Φ_{10} comme flux dans l'entrefer pour l'application de cette formule en vertu de ce que nous a montré l'essai cité au § 29 où le flux le long de l'armature mobile ne varie pas plus de 0.2 0/0 pour $x = 0$.

Relevé de la courbe de $n_2 I_2$ en fonction de l'entrefer à flux total constant.

$n_2 I_2$ AT	Entrefers x mm	Flux utile Φ Maxwells	$n_2 I_2$ (Suite) 134,4 ...	x	Φ_{10}
—	—	—	—	—	—
0	0	22530	143,95	0,3301	18205
18,55	0,0379		150,5	0,3537	
20,43	0,0405		158,1	0,3829	
22,99	0,04395				
26,02	0,0481		157,4	0,4010	
29,01	0,0523		165,45	0,4352	
32,44	0,0572		177,9	0,4942	
35,18	0,0613		187,2	0,5403	
39,68	0,0680		198,8	0,6038	16640
44,27	0,0749		207	0,6523	
49,37	0,08275		211	0,6765	
56,2	0,0943		220,1	0,7365	
61,41	0,1034		227,4	0,7848	
66,83	0,1137		239,2	0,871	15420
71,96	0,1241				
79,63	0,1415	20190	237,9	0,8763	
84,5	0,153		254,3	1,014	
89,45	0,1648		263,4	1,101	
94,8	0,1783		284,8	1,332	
100,05	0,192		302,4	1,550	13450
106	0,2084		321,8	1,854	
113,7	0,2310		338,2	2,158	
120,45	0,2512	19030	354	2,50	12000
122,55	0,2582		373,4	2,972	
128,5	0,2770		390	3,464	
134,4	0,2961		397,9	3,75	10500

Cette courbe très intéressante parce qu'elle correspond au début du coude de la caractéristique totale principale est à la limite de ce que nous pouvons relever correctement dans ce genre d'essais. Nous avons été gêné par les déformations non élastiques de l'appareil qui étaient fonction de la durée de mise sous tension, et même de l'intervalle entre les inversions de l'excitation. Il est même peut-être à craindre que les très petites valeurs des entrefers de cette courbe ne correspondent pas rigoureusement à celles mesurées au cours des pesées. Nous avons relevé un très grand nombre de points au début, ce qui nous a permis d'avoir tout de même un tracé précis. Il y a deux discontinuités, dont la première provient sur-

* Limite des entrefers corrigés.

tout des erreurs sur les corrections de flexion du fléau ; aussi pour les calculs des attractions nous n'avons employé que la formule 11).

Le point anguleux est parfaitement défini ; c'est le deuxième du tableau car nous n'avons pas donné, pour abrégé, les points situés avant qui sont tous en ligne droite. Il a lieu pour l'entrefer $0^{\text{mm}},0379$ alors que le déplacement de zéro mesuré directement n'est que de $0^{\text{mm}},0325$. C'est toujours par rapport à ce dernier point que nous avons compté les entrefers pour le calcul des attractions.

Il faut remarquer qu'avec la saturation le départ de la courbe est rectiligne sur une longueur de plus en plus grande.

Entrefers x_0 mm	Flux Φ_2' Maxwells	$\left(\frac{\partial nI}{\partial c}\right)_{\Phi_2 x=x_0}$ AT par cm	Forces mesurées — $0^{\text{gr}},5$ grammes F	Forces calculées par la formule 11 F ₁₁	$\frac{F}{F_{11}}$
—	—	—	—	—	—
0 mesures	28900				
0 pesées	28330	7220	2556	2152	1,187
0,02	27710	6930	2277	1976	1,152
0,03	27420	6800	2094	1898	1,104
0,04	27160	6480	1950	1773	1,100
0,05	26880	6160	1823	1651	1,104
0 075	26280	5320	1548	1364	1,135
0,10	25760	4670	1331	1154	1,154
0,15	24920	3900	1014,5	899,5	1,128
0,20	24210	3420	838,5	745	1,126
0,25	23580	3060	716,5	631,5	1,1345
0,30	23030	2750	611,2	541	1,130
0,35	22540	2590	538,5	488	1,110
0,40	22100	2320	476,3	420,3	1,133
0,50	21300	1970	381,4	331,6	1,150
0,60	20690	1725	314,2	274,1	1,146
0,75	19915	1460	241,3	215	1,123
1,00	18920	1100	168,4	146,2	1,152
1,25	18180	910	127,7	111,7	1,144
1,50	17600	770	100,2	88,5	1,133
1,75	17150	650	82,1	71	1,156
2,00	16780	545	68,1	56,9	1,196

L'examen de ce tableau montre qu'à partir de l'entrefer $0^{\text{mm}},02$ le rapport entre les forces mesurées et les forces calculées directement par la formule 11) se tient en moyenne aux environs 1,13, soit une divergence des résultats de 13 % (1).

(1) Pour les premiers entrefers, la divergence diffère beaucoup de cette valeur à cause de la mauvaise détermination de la courbe, venant des déformations que nous avons signalées un peu plus haut.

Cette divergence peut se justifier ainsi : dans le point suivant, nous avons fait une comparaison des points 4, 5 et 6 ; cette comparaison montre que dans le point actuel il doit y avoir une erreur par défaut de 2,75 % sur la détermination des flux. Cela entraîne la même erreur sur les forces calculées puisque, d'après la formule 11), elles sont simplement proportionnelles à l'échelle des flux.

D'autre part nous verrons, dans le paragraphe suivant, que, pour tenir compte de la courbure de la caractéristique totale principale pour $x=0$, il convient de majorer les résultats donnés par la formule 11) d'environ 10 %.

Il résulte finalement que l'écart entre les valeurs inscrites au tableau précédent doit être de $10 + 2,75 = 12,75$ %, pour que les formules 7') et 10') appliquées à l'entrefer seul soient encore exactes dans ce cas, ce qui a lieu sensiblement. Il faut remarquer que ces deux dernières formules sont les seules applicables sans artifices dans ce cas.

La vérification s'étend à peu près jusqu'au dernier entrefer, malgré les gros écarts avec les conditions de la déformation servant de base aux calculs. Cela est dû à la grande constance du coefficient d'Hopkinson au voisinage du point étudié.

Pour l'entrefer zéro, la valeur calculée figurant au tableau et qui convient presque a été calculée en prenant $\frac{\partial nI}{\partial x}$ aussitôt le point anguleux. La valeur prise avant ne semble pas du tout convenir.

La formule de Maxwell aurait donné dans ce cas :

$$\frac{2150^2 \times 74}{4\pi \times 3,12 \times 981 \times 390} = 2282^{\text{er}},$$

qu'il convient de majorer de 5,5 % pour tenir compte de l'erreur sur la mesure des flux, soit 2 408, valeur voisine de celle donnée par notre calcul ($2\,152 \times 1,13 = 2\,432$) qui est presque exact.

Le calcul semble néanmoins donner encore, pour le collage, des résultats plus faibles que la réalité comme pour le point précédent.

6° point.

$$I_1 = 0^{\text{A}}, 2947, \quad n_1 I_1 = 1132^{\text{AT}}, 5.$$

Ampères-tours moyens en cm. pour $x=0$: $16^{\text{AT}}, 12$. Champ moyen : 20,24 gauss.

Flux pour $x=0$: $\Phi_2 = 42290$ Max., $\Phi_{10} = 32220$ Max., $v = 1,311$.

Induction moyenne dans l'entrefer pour $x=0$: 10 340 gauss.

Pour ce point, nous n'avons pas relevé la courbe de $n_2 I_2$ en fonction de l'entrefer à flux total constant ni fait ainsi le calcul des attractions. Nous n'avons pu relever que la courbe de Φ_2' en fonction de x à $n_1 I_1$ constants, de façon à pouvoir calculer pour chaque entrefer la quantité $\frac{F}{\Phi_2'^2}$ et pouvoir la comparer à celles relatives aux 4° et 5° points.

Entrefers x_0 mm	Flux Φ'_2 Maxwells	Forces <i>reduites</i> calculées — 0 gr.,5 grammes	$\left(\frac{F}{\Phi'^2_2}\right)_6$ pour le 6 ^e point	$\left(\frac{F}{\Phi'^2_2}\right)_4$ pour le 4 ^e point	$\left(\frac{F}{\Phi'^2_2}\right)_5$ pour le 5 ^e point	$\frac{\left(\frac{F}{\Phi'^2_2}\right)_5}{\left(\frac{F}{\Phi'^2_2}\right)_4}$	$\frac{\left(\frac{F}{\Phi'^2_2}\right)_6}{\left(\frac{F}{\Phi'^2_2}\right)_5}$
—	—	—	—	—	—	—	—
0 mesures	42290						
0 pesées	42120	4929	277,8	415,6	348,3	0,766	0,8725
0,02	42010	4677	264,95	305,3	296,3	0,97	0,894
0,03	41980	4516	256,3	270,95	278,3	1,0265	0,9215
0,04	41910	4302	244,9	248	264,4	1,066	0,926
0,05	41840	4146	242,6	231	252,4	1,0935	0,8615
0,075	41710	3774	217	203	224,1	1,1045	0,968
0,10	41590	3436	198,6	180,95	200,8	1,110	0,99
0,15	41290	2828	165,95	148,8	163,1	1,096	1,0165
0,20	41010	2440	145	129,55	143	1,103	1,014
0,25	40730	2157	130	117	129	1,103	1,008
0,30	40470	1917	117,1	103,5	115,1	1,112	1,017
0,35	40200	1740	107,65	97,82	105,95	1,083	1,016
0,40	39980	1571	98,35	87,1	97,6	1,120	1,008
0,50	39570	1327	84,8	75,6	84,05	1,112	1,009
0,60	39180	1140	74,3	66,85	73,4	1,098	1,012
0,75	38690	920	61,52	56,1	60,9	1,0855	1,010
1,00	38050	683	47,2	45,3	47,05	1,039	1,004

L'examen de ce tableau montre que, pour les points 4 et 5, le rapport $\frac{\left(\frac{F}{\Phi'^2_2}\right)_5}{\left(\frac{F}{\Phi'^2_2}\right)_4}$ des forces réduites rapportées aux flux *totaux* se tient à partir de l'entrefers 0^{mm},05 aux environs de 1,10, soit une divergence entre ces forces de 10 %.

Nous savons que dès que l'on est en droit d'admettre l'hypothèse de Pérot, c'est-à-dire à partir d'un certain entrefers, les forces rapportées aux mêmes flux utiles pour les mêmes valeurs de l'entrefers sont égales ; il faut donc exprimer le rapport précédent en fonction de la quantité

$$\frac{\left(\frac{F}{\Phi'^2_{10}}\right)_5}{\left(\frac{F}{\Phi'^2_{10}}\right)_4}, \quad \text{qui est, d'après ce que nous venons de dire, égale à l'unité.}$$

Pour l'entrefers zéro ce rapport est égal à cette dernière quantité multipliée par l'inverse du rapport des carrés des coefficients d'Hopkinson ; on peut admettre qu'il garde la même valeur pour les autres entrefers pourvu qu'ils ne soient pas trop grands et que les coefficients d'Hopkinson ainsi que l'inclinaison des caractéristiques ne soient pas trop différents dans les deux cas. La différence entre les forces réduites pour les points 4 et 5

qui figurent au tableau précédent doit donc être égale à :

$$\left(\frac{1,3105}{1,282} \right)^2 = 1,0155,$$

soit environ 4,5 %.

La différence 10 % — 4,5 %, soit 5,5 % ne peut s'expliquer que par une *erreur par défaut* de $\frac{5,5}{2} = 2,75$ % dans la mesure des flux pour le point n° 5 ; la vérification étant très exacte pour le n° 4, et cette différence étant *constante* à partir de 0^{mm},05 jusqu'à 0,60, points entre lesquels on peut comparer les résultats d'une façon satisfaisante. S'il y avait une divergence quelconque entre les forces mesurées relatives aux points 4 et 5, cette divergence ne serait certainement pas constante, elle irait en s'atténuant lorsque l'entrefer augmente puisque l'hypothèse de Pérot devient de plus en plus exacte. Nous avons vu qu'en tenant compte de cette erreur sur la connaissance des flux, la vérification des formules pour le point 5 était très bonne.

Si nous faisons maintenant le rapport $\frac{\left(\frac{F}{\Phi_2'^2} \right)_6}{\left(\frac{F}{\Phi_2'^2} \right)_5}$ nous pouvons tout de

suite conclure d'après ce que nous venons de dire qu'il *suffit* que ce rapport soit constant pour que la formule se vérifie pour le point n° 6. Nous voyons qu'il en est ainsi à partir de 0^{mm},15 où la divergence se tient aux environs de 1 % par excès. D'après le rapport inverse des carrés des coefficients d'Hopkinson, elle devrait être de 4,5 % par défaut. Il y a donc encore une erreur par défaut de $\frac{4,5 + 1}{2} = 2,75$ % sur la connaissance des flux par rapport à ceux du point 5, c'est-à-dire de 5,5 % par rapport aux valeurs exactes.

Pour les entrefers plus petits, ce rapport est inférieur à l'unité et varie assez vite comme pour le couple de points précédents où la formule se vérifiait parfaitement pour chacun d'eux. On peut donc dire que cela ne constitue pas un obstacle à l'exactitude des formules pour ces entrefers, surtout si l'on remarque que la formule de Maxwell donne des résultats de plus en plus grands avec la saturation ; elle donne en effet :

$$F = \frac{32100^2 \times 74}{4\pi \times 3,12 \times 981 \times 390} = 5085 \text{ gr},$$

à augmenter de 11 % pour tenir compte de l'erreur sur les flux, au lieu des 4 929 mesurés.

31. — *Caractéristique du flux utile à flux total constant. Notion d'origine virtuelle.* — Nous avons dit au paragraphe 19, en faisant la théorie des fuites, que la caractéristique des flux de fuites dans une déformation à flux total constant, symétrique de la caractéristique du flux utile, était une droite ne passant pas par l'origine ; nous avons donné le nom d'*origine*

virtuelle à l'intersection de cette droite avec l'axe des ampères-tours. Nous avons montré qu'en rapportant les caractéristiques à cette origine, c'est-à-dire en ôtant par la pensée la région *inactive*, nous retombions dans le cas théorique de la perméance de fuites constante.

L'explication de ce phénomène est assez simple. Lorsque l'on produit une déformation à flux total constant par variation de l'excitation, le flux reste constant dans toute la région AB (fig. 48) qui n'est pas bobinée parce qu'il n'y a pas *modification* de la répartition des potentiels magnétiques, c'est-à-dire des fuites. La variation d'excitation ne se fait sentir qu'au delà des points A et B situés à la base des bobines. Ce ne sont donc que pour les régions au delà et pour elles seules qu'il y a modification des fuites au cours de la déformation. La région AB est donc bien une région inactive, qui peut être ôtée sans aucune perturbation du circuit magnétique,

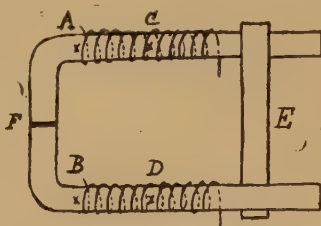


Fig. 48.

à la condition de déduire des ampères-tours d'excitation les ampères-tours constants qui sont absorbés par cette région.

Théoriquement, si la *perméabilité instantanée* est constante, on peut admettre l'existence de centres de gravité pour l'action des deux bobines et dans ce cas la zone inactive est la région comprise entre les points C et D dite *zone inactive théorique*. La région active correspondante sera donc comprise entre CED.

Lorsque l'on fait l'étude des déformations à flux total constant par la méthode que nous avons suivie, l'étendue de la zone inactive ainsi que la position de l'origine virtuelle *dépend* de l'emplacement et de la répartition des ampères-tours d'excitation supplémentaires $n_2 I_2$. Ainsi, il est bien certain que si ces ampères-tours étaient concentrés en F, point milieu du circuit magnétique, l'origine virtuelle tomberait au voisinage de l'origine réelle puisqu'il n'y aurait aucune région où il n'y ait pas variation des fuites. On s'explique même très bien dans ce cas comment l'origine virtuelle se déplace et suit l'origine réelle lorsque l'on se déplace sur une caractéristique lieu du sommet des cycles d'hystérésis ou bien sur une branche d'un cycle.

Il est essentiel de remarquer que le calcul des forces dans une déformation à flux total constant comme nous l'avons fait est *toujours* exact quelle que soit la position de l'excitation supplémentaire (1) et la compa-

(1) Il est bien certain que dans tous les cas, on doit retrouver les mêmes caractéristiques pour l'entrefer seul et par conséquent les mêmes variations.

raison avec les mesures directes est toujours légitime à la condition que ces mesures aient été faites dans les *mêmes conditions* de répartition des forces magnétomotrices.

Aussi, pour pouvoir comparer, comme nous l'avons fait, les essais à flux total constant faits avec l'excitation $n_1 I_1 + n_2 I_2$ avec les essais faits à excitation constante $n_1 I_1$, il est *nécessaire* que les ampères-tours supplémen-

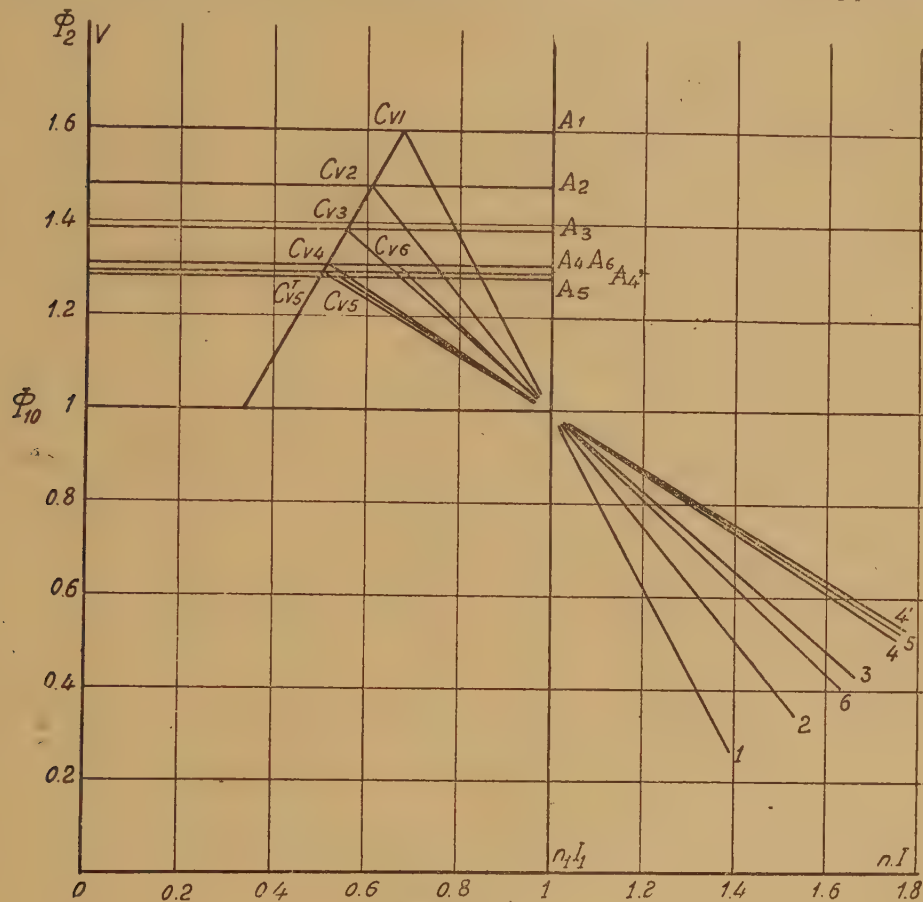


Fig. 49.

taires $n_2 I_2$ aient *même répartition* longitudinale que $n_1 I_1$. C'est pourquoi nous avons pris pour produire $n_2 I_2$ une couche complète des bobines d'excitation et non une bobine spéciale. Dans ces conditions nous avons pu calculer les attractions correspondant au cas *normal* de travail de l'électro-aimant et non à un cas idéal.

Nous avons rassemblé, sur les deux mêmes planches, les caractéristiques des flux utiles relatifs aux points 1, 2, 3, 4, 4', 5, 6 (voir fig. 45) en les ramenant toutes au même *flux utile* pour l'entrefer zéro, c'est-à-dire en prenant les flux utiles dans ces conditions comme unité. Les flux totaux sont alors représentés par les coefficients d'Hopkinson pour $x = 0$.

Sur la figure 49, nous avons choisi l'échelle des excitations de façon

que les ampères-tours absorbés pour l'entrefer zéro, c'est-à-dire par le fer

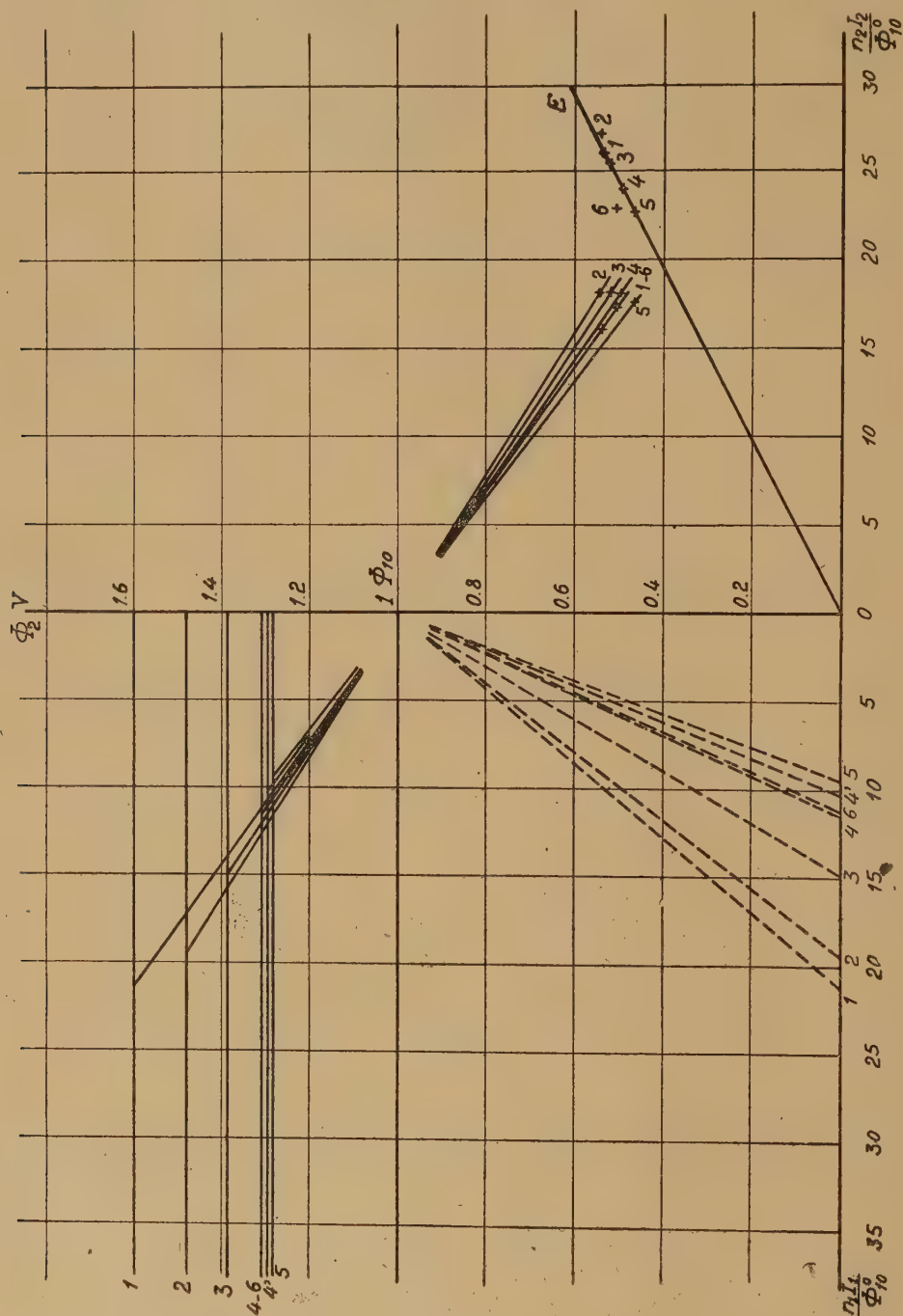


Fig. 50.

seul, soient représentés par une longueur constante, c'est-à-dire, qu'en somme, nous avons pris $n_1 l_1$ comme unité. Cette longueur peut représenter approximativement la longueur du fer du circuit magnétique lui-

même. La position de l'origine virtuelle, ou de C^V qui lui correspond, détermine donc directement la longueur de la zone inactive qui est égale à $C_n C_{Vn}$.

Nous voyons ainsi comment varie l'étendue de la région inactive lorsque le flux et le coefficient d'Hopkinson varient. Pour les premiers points de 1 à 4', les points $C_{V1} \dots C_{V4'}$ correspondants sont *en ligne droite*. Nous nous sommes demandés si cela avait une signification physique ; en particulier ce que représentait C_{V0} correspondant au circuit magnétique parfait avec une induction constante en tous points. La zone inactive dans ce cas serait

les $\frac{34}{100}$ de la longueur du fer ; la longueur de la zone inactive théorique

étant les $\frac{42}{100}$ de celle du fer, il semblerait donc que dans ces conditions

l'action résultante des bobines serait appliquée en des points en amont du point milieu. Pour tous les points relevés expérimentalement la zone inactive est *supérieure* à la zone théorique. En pratique, dans le calcul des électro-aimants, il faudra donc augmenter d'une certaine quantité, fonction du coefficient d'Hopkinson, la zone inactive théorique.

Sur la figure 50 nous avons pris au contraire une échelle des ampères-tours *proportionnelle* au flux utile, c'est-à-dire que nous avons porté comme excitation les quantités $\frac{nI}{\Phi_{10}}$. Il en résulte qu'ordonnées et abscisses

étant réduites dans les mêmes proportions, les angles se conserveront pour toutes les caractéristiques, c'est-à-dire que les perméances et les réluctances seront directement comparables.

Nous avons fait sur cette figure, pour les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, la construction de la caractéristique de l'*entrefer seul* OE pour la valeur $3^{mm} 3,75$ par la méthode que nous avons exposée sur la figure 23 (1). Nous voyons que les points 1, 3, 4, 5, appartiennent bien à la même caractéristique, ce qui vérifie bien pour 1, 3, 4, l'exactitude de la construction lorsque, comme nous l'avons dit, la perméabilité *instantanée* était la même pour tous les points du fer du circuit magnétique. Il y a bien *équivalence* avec le cas théorique de la perméabilité constante.

Les points 2 et 6 ne sont pas sur la droite à cause de la concavité de la caractéristique totale principale qui existe en ces deux points. Il en résulte, d'après la remarque 2 du paragraphe 19, qu'il y a eu erreur sur la mesure de $n_2 I_{2p}$ venant d'une absorption ou d'un apport d'ampères-tours par le fer doué d'une perméabilité instantanée variable. Pour le point 6 même, la caractéristique du flux utile n'est pas rigoureusement une droite comme pour les points précédents, probablement pour cette raison.

Pour le point 5, où, comme nous le savons, la caractéristique totale principale commence à s'incurver, le fait que la détermination de la caractéristique de l'entrefer seul soit encore exacte veut dire que la variation

(1) Nous avons pris à dessein le plus grand entrefer possible pour que les différences, si la construction n'est pas exacte, soient plus marquées.

de perméabilité instantanée n'a encore touché que la zone inactive où le flux est le plus grand, cette perméabilité étant encore constante dans la zone active, autrement dit, que le relevé de la caractéristique du flux utile est encore exact. Cela va nous être très utile pour calculer la correction

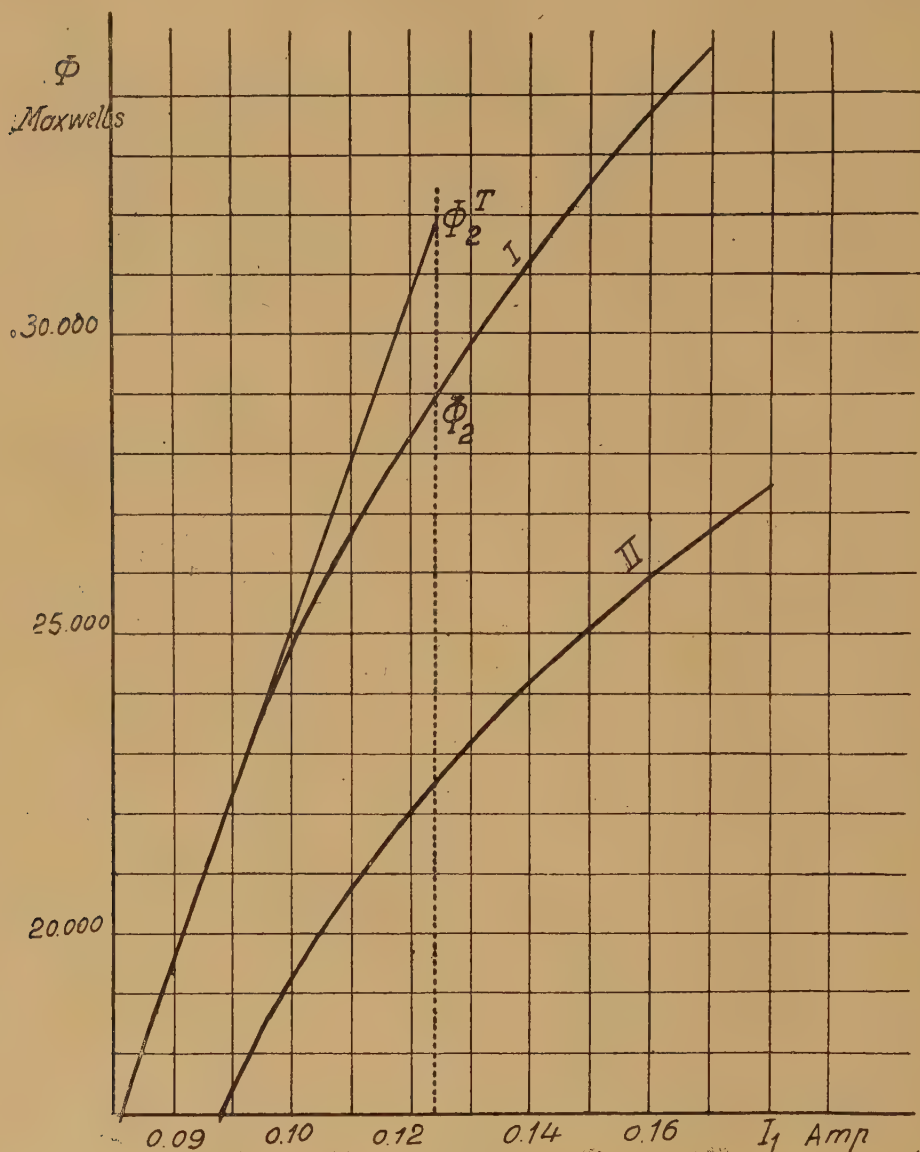


Fig. 51.

à faire subir aux forces calculées directement par la formule 11) pour ce point.

Nous avons dit qu'il fallait, pour appliquer cette formule, ramener la perméabilité instantanée à être partout égale à celle du point A (fig. 25), ce qui revient à faire porter la correction sur les ampères-tours trouvés dans le relevé des courbes à flux total constant. On peut opérer un peu

différemment, sachant que la zone active possède une telle perméabilité constante, c'est-à-dire que la mesure de $n_2 I_2$ n'a pas été altérée, et faire porter la correction sur les flux. On peut, en effet, prendre la perméabilité instantanée d'un point quelconque et l'étendre à la totalité du circuit magnétique; on peut donc prendre la perméabilité instantanée de la région déformable comme base, et la supposer étendue à la région inactive.

Dans ce cas, le flux total à prendre sera Φ_2^T , obtenu en prolongeant la partie droite de la caractéristique totale principale (fig. 51 qui est un agrandissement de la figure 45) (1). On trouve $\Phi_2^T = 31\,800$ Max. au lieu du flux réel $\Phi_2 = 28\,900$ Max., ce qui entraîne une majoration des calculs des attractions de $\frac{31800}{28900} = 1,10$, soit 10 %.

On peut encore, en revenant à la figure 49 et en remarquant que la caractéristique du flux utile a été relevée exactement en fonction de $n_2 I_2$, dire que si le point C_{V_5}' n'est pas en $C_{V_5}^T$ sur la droite déjà signalée, c'est uniquement à cause d'une modification des ampères-tours absorbés par la zone inactive qui porte sur la longueur du segment $C_5 C_{V_5}$. Il en résulte donc qu'en ramenant la perméabilité instantanée à être partout la même, il faut amener le segment $A_5 C_{V_5}$ à être égal à $A_5 C_{V_5}^T$, c'est-à-dire à multiplier les $n_2 I_2$ trouvés par $\frac{A_5 C_{V_5}^T}{A_5 C_{V_5}} = \frac{50}{45,5} = 1,099$ ce qui majore les forces calculées d'autant.

On peut justifier, grâce à cette dernière méthode — bien que pour le point 2 on ne trouve pas exactement la caractéristique de l'entrefer — pourquoi les forces calculées dans ces conditions n'ont pas à subir de correction pour être égales aux forces mesurées, le point C_{V_2} étant sur la droite commune aux autres points.

Cette méthode semble donc être un critérium (2); du moment que la perméabilité instantanée est constante quelle que soit sa valeur, les points C_V doivent se trouver sur la même droite; s'ils ne s'y trouvent pas, la correction à faire subir aux formules étendues à la totalité du circuit magnétique est précisément celle qui convient de faire subir aux segments AC_V pour amener les points C_V sur cette droite. Nous n'avons pas pu malheureusement vérifier cette proposition pour le point n° 6.

Nous avons fait un certain nombre d'essais basés sur des méthodes différentes pour montrer le déplacement de l'origine virtuelle avec celui de l'origine réelle et qui tend à laisser inchangée, pour le même point, la région inactive. Tous concourent au même résultat; le plus probant est celui que nous avons fait pour le point n° 5 où nous avons relevé directement la caractéristique de $n_2 I_2$ à flux total constant, en suivant la branche

(1) La caractéristique totale principale commence à s'incurver uniquement à cause de la saturation qui apparaît dans la région inactive. La partie droite qui a été relevée au moment où tous les points du fer du circuit magnétique avaient la même perméabilité instantanée correspond à celle qu'a encore la région active.

(2) Nous disons cela sous toute réserve, car nous nous garderions bien de généraliser une chose qui peut être, en somme, une particularité de notre appareil.

descendante du cycle d'hystérésis, c'est-à-dire sans inverser l'excitation et en partant d'une valeur maxima des flux, en chaque point bien déterminée. La méthode consiste à ouvrir *rapidement* le circuit magnétique jusqu'à l'entrefer x en maintenant $n_1 I_1$ constants et en lisant l'élongation obtenu $\Delta \Phi_2$ pour la variation du flux total, puis à produire une élongation égale et de signe contraire en établissant l'excitation $n_2 I_2$. La mesure se fait en réglant par tâtonnement l'entrefer x . Ces élongations étant très petites par rapport à celle correspondant à Φ_2 , il est possible d'utiliser une grande sensibilité du balistique et d'avoir directement une précision analogue à celle obtenue avec le compensateur.

Lisant les élongations $\Delta \Phi_{10}$ et $\Delta' \Phi_{10}$ correspondantes et qui sont *inéga*les, il est possible de construire la variation de flux utile $\Delta \Phi_{10} - \Delta' \Phi_{10}$ en fonction de $n_2 I_2$.

Le résultat, pour les quelques points effectués, est que les ampères-tours $n_2 I_2$ trouvés correspondent *rigoureusement* aux mêmes entrefers que lorsque l'on opère par inversion complète de l'excitation.

Nous avons représenté sur la figure 54 les deux caractéristiques du flux utile à flux total constant relevées en suivant, d'une part, le lieu du sommet des cycles et, d'autre part, la branche descendante du cycle d'hystérésis. Les ampères-tours hystérétiques étant égaux à 120 pour cet essai, le rapport $\frac{CC_v}{CA}$ pour le premier cas est égal à $\frac{265}{476} = 0,557$ et $\frac{C_1 C_v}{C_1 A}$ pour le deuxième cas à $\frac{344}{596} = 0,577$.

L'étendue de la zone inactive reste la même dans ces deux essais à moins de 4 % près (1). Il semble donc bien que cette zone doive être *pratiquement* indépendante de la nature des caractéristiques suivies par le fer. Voici l'explication que l'on peut donner de ce phénomène. Pour l'entrefer zéro les états sont évidemment les mêmes dans les deux cas. Après la même variation d'entrefer pour les deux essais le tracé des lignes de fuites doit rester sensiblement le même si les caractéristiques suivies par le fer sont rectilignes. Il en résulte que le partage de la région active et de la région inactive doit être approximativement le même, surtout si nous nous rapportons à ce que nous avons dit au sujet de la figure 49 où ce partage semble être fait suivant une fonction linéaire du coefficient d'Hopkinson et ne pas dépendre de l'inclinaison de la caractéristique totale principale.

Nous avons dit que nous croyons voir là la manifestation physique la plus probante de l'existence des ampères-tours hystérétiques qui nous ont servi à expliquer l'hystérésis et qui jouissent des mêmes propriétés que les ampères-tours réels.

(1) On peut objecter ici que la perméabilité instantanée n'est pas constante. Nous avons fait cette étude pour des points plus bas, en employant un procédé analogue à la deuxième méthode de détermination de l'origine virtuelle dans le fonctionnement en aimant, que l'on verra au chapitre suivant. On trouve la même conservation de la région inactive.

CHAPITRE V

ETUDE PARTICULIÈRE DE L'HYSTÉRÉSIS ET DU FONCTIONNEMENT EN AIMANT

Ce chapitre a pour but, non pas de donner des preuves de l'existence physique des ampères-tours hystérétiques, ni de rechercher l'origine et la nature du phénomène en lui-même, mais de montrer que tous les problèmes industriels relatifs aux circuits magnétiques présentant de l'hystérésis *doivent* se traiter en considérant cette hystérésis comme due à l'existence préalable de ces ampères-tours.

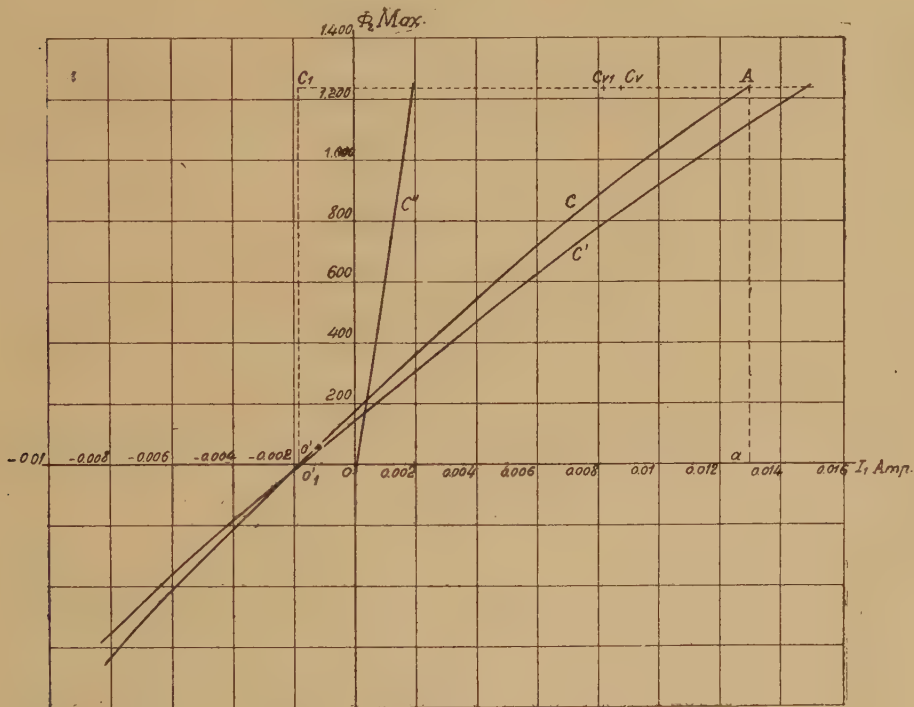


Fig. 52.

32. — *Comparaison des cycles d'hystérésis pour deux valeurs de l'entrefer en partant du même flux total.* — Nous avons relevé les branches descendantes des cycles d'hystérésis correspondant à l'entrefer zéro et à un entrefer voisin de $0^{\text{mm}},80$ en partant du même flux total, en vue de montrer la propriété signalée au paragraphe 10 : à savoir que ces deux courbes se coupent sur l'axe des ampères-tours.

Nous avons relevé ces branches par la méthode d'Ewing, c'est-à-dire en faisant des variations de flux en partant chaque fois du sommet du cycle, en nous servant pour cela de l'interrupteur B (fig. 37) qui insère une résistance variable dans le circuit d'excitation principal et coupe le second. Nous avons été obligé, à cause de ce montage, de faire ces variations en deux fois, en nous arrêtant à l'excitation nulle, lorsque l'excitation finale était de sens contraire à la première.

Les résultats obtenus par cette méthode sont susceptibles d'être légè-

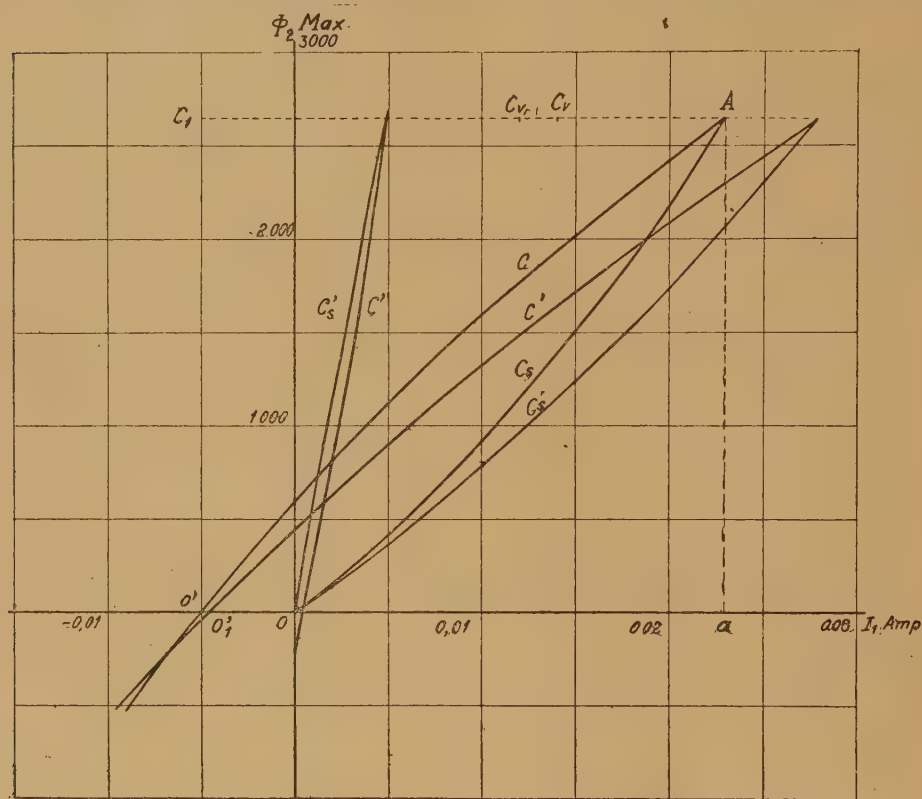


Fig. 53.

rement faussés par le trainage magnétique, ils sont ici suffisamment nets pour qu'il n'y ait pas lieu de s'en inquiéter.

La figure 52 représente les deux courbes C et C' pour le point n° 1. La courbe C' correspond à l'entrefer 0^{mm},82. La courbe C'' construite en faisant les différences horizontales des abscisses présente une très légère concavité tournée vers le haut.

La figure 53 représente ces deux courbes pour le point n° 2. Le deuxième entrefer est égal à 0^{mm},85. La courbe C'' est aussi très légèrement incurvée. Nous avons construit en même temps les courbes Cₛ et Cₛ' lieu des sommets des cycles d'hystérésis pour les mêmes entrefers. La courbe Cₛ'' formée par les différences des abscisses de ces deux dernières courbes est rigoureusement rectiligne.

Enfin la figure 54 représente les deux courbes C et C' pour le point n° 5, c'est-à-dire pour le commencement de la saturation. La courbe C'' est sensiblement rectiligne. Le deuxième entrefer est égal à 0^{mm},82.

Nous ferons remarquer que sur ces trois figures les courbes C et C' se coupent au dessous de l'axe des ampères-tours, ce qui semblerait ne pas vérifier exactement la propriété énoncée au paragraphe 10. Cela vient

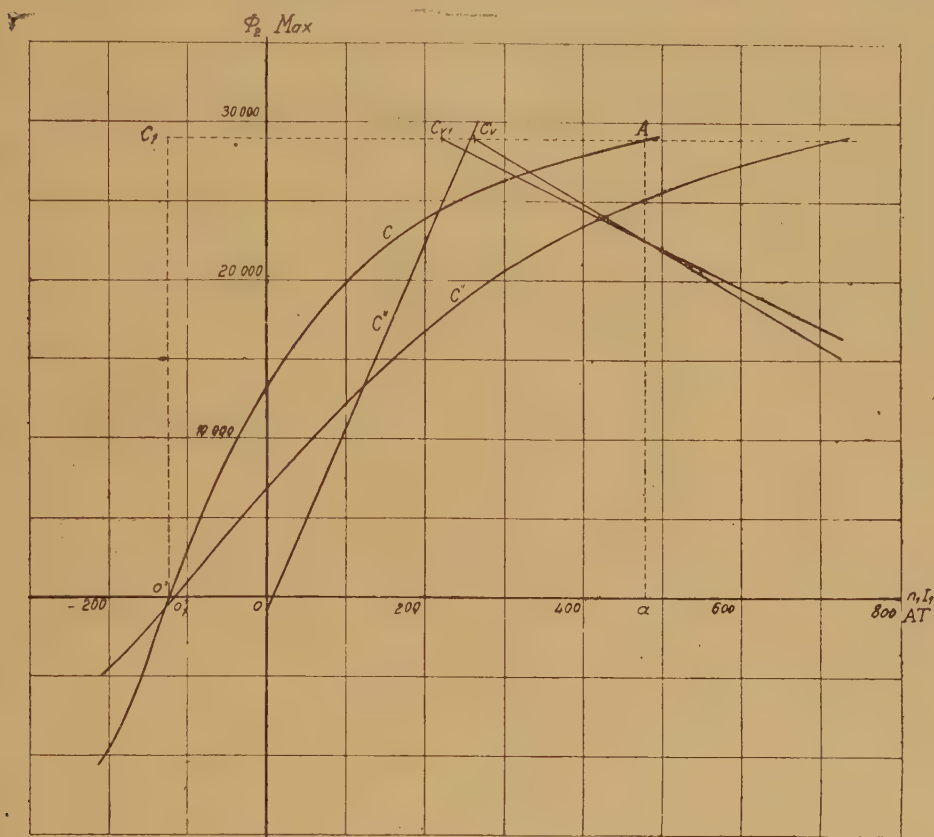


Fig. 54.

d'une erreur introduite par le mode opératoire ; nous avons vérifié, en effet, l'égalité des flux totaux maxima pour les deux entrefers, en les mesurant par inversion complète de l'excitation. Nous savons que, pour un entrefer différent de zéro, le flux dans la région active est plus petit lorsque l'on opère ainsi que lorsque l'on n'inverse pas l'excitation ; il y a destruction du rémanent venant du flux correspondant à l'entrefer zéro, ce qui se traduit par le déplacement de l'origine virtuelle que nous avons signalé.

Les ampères-tours absorbés par le fer de la région active (qui est restée la même dans son étendue comme nous l'avons montré et qui est la seule à avoir changé d'état) ont varié de ce fait de la quantité $C_v C_{v_1}$ (fig. 54). Si nous admettons que les variations des ampères-tours coercitifs sont pro-

portionnelles aux variations des ampères-tours totaux C_1A absorbés par le fer lorsque celles-ci sont petites, le point O'_1 , origine de la caractéristique C' relevé avec ce mode opératoire, devra être tel que :

$$\frac{O_1O'_1}{O_1O} = \frac{C_{V_1}C_V}{C_1A},$$

ou :

$$\frac{C_1A - C_{V_1}C_V}{C_1A} = \frac{OO'_1}{OO'}.$$

Cette remarque se vérifie très bien pour la figure 54 correspondant au point n° 5 pour lequel nous avons déterminé expérimentalement le point C_{V_1} . Le rapport $\frac{C_1A - C_V}{C_1A}$ est égal à 0,934 et $\frac{OO'_1}{OO'}$ à 0,927.

Pour les deux premiers points nous avons déterminé C_{V_1} par la proportionnalité :

$$\frac{AC_V}{AC_{V_1}} = \frac{Oa}{Oa_1}.$$

Pour la figure 52 (point n° 1), on a :

$$\frac{C_1A - C_{V_1}C_V}{C_1A} = 0,961 \quad \text{et} \quad \frac{OO'_1}{OO'} = 0,966.$$

Pour la figure 53 (point n° 2), nous avons :

$$\frac{C_1A - C_{V_1}C_V}{C_1A} = 0,93 \quad \text{et} \quad \frac{OO'_1}{OO'} = 0,92.$$

Ces calculs montrent que les ampères-tours hystérétiques doivent rester les mêmes pour les courbes C et C' , lorsque celle-ci est relevée correctement, à 1 % près au moins.

La conclusion qu'il faut tirer de cette expérience est que toutes les constructions que nous avons données relatives aux caractéristiques, en particulier pour déterminer la loi des attractions en fonction de l'entrefer, sont encore *valables* lorsqu'elles sont faites avec une branche de cycle d'hystérésis à la condition de *transporter* l'origine comme il convient.

Cette remarque permettra donc de traiter tous les problèmes relatifs aux électro-aimants formés de matériaux hystérétiques et, surtout de faire en toute rigueur l'étude des électro-aimants *polarisés*, c'est-à-dire dans le circuit magnétique desquels se trouve déjà un aimant. On connaît la propriété de ces appareils qui est de donner des attractions différentes suivant le sens de l'excitation, ce qui fait que pratiquement on les utilise comme ne fonctionnant que dans un sens déterminé du courant d'excitation. Certains de ces électro-aimants sont polarisés artificiellement au moyen d'un deuxième enroulement parcouru par un courant fixe ; les problèmes, dans ce cas, se traitent rigoureusement de la même façon.

33. — *Etude des attractions dans le fonctionnement en aimant.* — Nous allons montrer que pour l'aimant, les ampères-tours hystérétiques une fois stabilisés, les constructions sont encore valables intégralement, c'est-à-dire que *l'aimant stable est assimilable à un électro-aimant possédant une*

excitation constante, et non à un système à flux constant comme beaucoup d'auteurs le croient encore.

Avant de procéder aux mesures dont il va être question, nous avons établi le rémanent de la façon suivante afin de le rendre très stable et de le retrouver toujours semblable à lui-même. Nous avons d'abord établi pour l'entrefer zéro, une excitation $n_1 I_1$ déterminée, puis inversé un certain nombre de fois cette excitation afin de partir d'un flux maximum parfaitement déterminé. Ensuite, nous avons coupé cette excitation ; à ce moment existe un flux rémanent assez fort, mais, qui tombe à une valeur

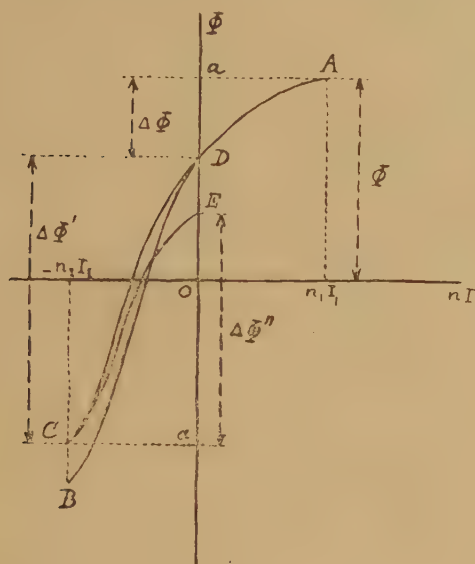


Fig. 55.

La mesure de ce flux rémanent est très délicate. Au début, nous le déduisons de la différence entre le flux maximum correspondant à $n_1 I_1$ et la variation de flux produite en rétablissant cette excitation à la fin de la série de mesures. Les résultats ainsi obtenus sont trop grands parce que l'on remonte en un point *plus bas* que le sommet normal du cycle d'hystérésis.

Nous avons ensuite imaginé la méthode suivante qui nous a donné de très bons résultats. Soit AB (fig. 55) la branche descendante du cycle décrit au cours d'une série d'inversions de $n_1 I_1$. Lorsque l'on décrit cette même branche en s'arrêtant au milieu, en mesurant la variation de flux $\Delta\Phi$ correspondant à la variation d'excitation $+n_1 I_1$ à 0, puis $\Delta\Phi'$ correspondant à 0 à $-n_1 I_1$, on s'aperçoit que $\Delta\Phi + \Delta\Phi'$ est inférieur à 2Φ , hauteur totale du cycle, c'est-à-dire que l'on aboutit seulement en C.

Après avoir ouvert et fait subir au circuit magnétique les traitements que nous venons d'indiquer, le flux résiduel est tombé de OD en OE. Lorsque l'on établit l'excitation $-n_1 I_1$ dans ces conditions, c'est-à-dire en partant de E, on doit retomber en un point très voisin de C, si ce n'est

beaucoup plus faible dès que l'on a ouvert, puis refermé le circuit magnétique. Il y a le phénomène de démagnétisation bien connu dû à la présence des entrefers ; aussi, pour stabiliser ce flux, nous avons fait varier alternativement de 20 à 30 fois de suite l'entrefer de 0 à 2^{mm},50. Après cette opération, le flux rémanent pour l'entrefer zéro, qui peut être *repéré* (et même mesuré en vertu de ce que nous savons maintenant) par la valeur de l'attraction pour cet entrefer, demeure remarquablement constant pendant plusieurs jours quelle que soit la nature des variations que l'on fasse subir à l'entrefer pourvu que l'on ne dépasse pas 1^{mm}.

ce point lui-même, puisque les états représentés par D et E sont en somme voisins par rapport à la hauteur totale du cycle. A la fin de la série de mesures ou de la stabilisation du rémanent, on établit donc l'excitation en sens contraire du sens initial et l'on note la variation de flux $\Delta\Phi''$ correspondante. Il est facile de voir que :

$$OE = \Phi_r = aO - AC + CE,$$

d'où :

$$\Phi_r = \Phi - (\Delta\Phi + \Delta\Phi') + \Delta\Phi'' = \Phi + \Delta\Phi'' - (\Delta\Phi + \Delta\Phi').$$

Toutes ces mesures doivent être faites plusieurs fois en les séparant chaque fois par un certain nombre d'inversions de $n_1 I_1$. Elles doivent être *extrêmement* précises pour que Φ_r ne soit pas entaché d'une erreur beaucoup trop grande.

Nous avons fait des séries de mesures des attractions pour les différentes valeurs de l'entrefer que nous connaissons — jusqu'à 0^{mm},50 — en partant de flux résiduels pour l'entrefer zéro variant de 2 100 à 7 300^{Max}. Il n'y a aucune particularité à signaler par rapport aux mêmes mesures faites en électro-aimant à excitation constante (1).

Nous avons construit, comme précédemment, les courbes de $\frac{F}{(\Phi_{10}^0)^2}$ en fonction de Φ_{10}^0 pour les différents entrefers afin d'avoir des valeurs moyennes beaucoup plus exactes. Ces courbes sont toutes horizontales à partir de 0^{mm},02 dans la région des flux étudiés. Nous avons calculé au moyen de ces valeurs les attractions correspondant à un flux utile de 4 310^{Max}, identique à celui de l'essai du point n° 3.

Avant de faire la comparaison des deux séries d'attractions en aimant et en électro-aimant, nous allons dire un mot de la détermination, sur l'aimant, de la caractéristique des flux utiles à flux *total rémanent* constant, c'est-à-dire de l'origine virtuelle et de la zone inactive.

Nous avons fait en premier lieu l'étude directe à flux *total* résiduel constant du circuit magnétique déformable formé par l'aimant. Pour cela, par analogie complète avec ce que nous avons fait pour l'électro-aimant, nous sommes partis d'une excitation fixe $n_1 I_1$ pour l'entrefer zéro et nous avons mesuré à la rupture de cette excitation les flux résiduels Φ_{r_2} , Φ_{r_5} et $\Phi_{r_{10}}$ au moyen de la première méthode exposée plus haut, la seule possible. Ensuite, ajoutant à $n_1 I_1$ les ampères-tours supplémentaires variables $n_2 I_2$, nous avons fait varier l'entrefer x jusqu'à avoir le même flux résiduel Φ_{r_2} après la rupture. Mesurant alors le flux utile résiduel $\Phi_{r_{10}}$ il nous sera possible d'avoir sa caractéristique lorsque nous connaîtrons les abscisses correspondantes.

Le flux total correspondant aux ampères-tours $n_1 I_1$ et à l'entrefer zéro est Φ_2 . Lorsque nous avons l'excitation $n_1 I_1 + n_2 I_2$ avec l'entrefer x , le flux est Φ_2' plus grand que le premier. On peut admettre que si la varia-

(1) Le coefficient d'Hopkinson pour $x = 0$, calculé en mesurant le flux total et le flux utile par la méthode précédente, est, dans toutes les mesures, voisin de 1,245, valeur inférieure au coefficient minimum dans le fonctionnement en électro-aimant.

tion de flux est faible, les ampères-tours hystérétiques *provenant du fer* sont proportionnels aux flux qui y circulent ; c'est-à-dire qu'ils sont augmentés, dans le deuxième cas, dans le rapport $\frac{\Phi_2'}{\Phi_1}$, ce qui permet de construire le point de la caractéristique.

Le résultat de cette expérience est que le flux Φ_{r3} se maintient constant comme Φ_{r2} et lui est sensiblement égal. Les ampères-tours correspondant à la région inactive sont les $\frac{85}{100}$ des ampères-tours totaux absorbés par le fer, ce qui veut dire que le flux demeure sensiblement le même sur la presque totalité du fer à cheval. Il paraît assez surprenant que *la région inactive soit beaucoup plus grande dans l'aimant que dans l'électro-aimant*. Il faudrait donc admettre que cette excitation d'origine interne siège au voisinage des *extrémités* du fer à cheval, et peut-être même sur les *faces extrêmes des entrefers*. Il y a là un point qui mériterait d'être étudié plus à fond et qui est étroitement lié à la notion de densité magnétique sur les faces terminales.

Nous avons repris cette détermination de la région inactive par la méthode indirecte suivante. Soient, pour l'entrefer zéro, Φ_{r2} le flux résiduel total, et Φ_{r10} le flux résiduel utile mesurés *après* stabilisation. Pour l'entrefer x , en partant de cet état *bien déterminé*, nous n'avons plus que Φ_{r2}' et Φ_{r10}' . Si nous ramenons Φ_{r10}' à correspondre à Φ_{r2} en le multipliant par $\frac{\Phi_{r2}}{\Phi_{r2}'}$ nous pouvons avoir la caractéristique de ce flux sachant que dans la déformation les ampères-tours hystérétiques sont *restés constants par hypothèse* et qu'ils sont, par conséquent, après le changement d'échelle, augmentés dans le même rapport $\frac{\Phi_{r2}}{\Phi_{r2}'}$ si l'on admet que la caractéristique suivie est rectiligne.

Cette méthode qui ne donne que des valeurs relatives pour les abscisses permet de déterminer l'étendue de la région inactive par rapport à la longueur totale du fer. Nous avons trouvé qu'elle en était les $\frac{84}{100}$ c'est-à-dire sensiblement la même chose que dans la première méthode (1).

Il résulte donc de cette identité que l'hypothèse que nous avons admise est *exacte*, c'est-à-dire que les *ampères-tours hystérétiques se conservent dans une déformation du circuit magnétique fonctionnant en simple aimant*.

Il faut remarquer que, dans le deuxième cas, nous avons étudié le système avec des flux stabilisés, ce qui n'avait pas lieu dans le premier.

Voici maintenant la comparaison des attractions.

(1) Il faut remarquer que cette façon de raisonner suppose une caractéristique totale principale de l'aimant rectiligne jusqu'à l'axe des ampères-tours. Si elle s'incurvait avant de l'atteindre, ce rapport correspondrait à une longueur totale du fer trop grande, autrement dit, la zone inactive réelle serait moins étendue ; les tracés des cycles d'hystérésis donnés plus haut ne semblent pas montrer l'existence d'une courbure sensible.

Entrefers x mm	Forces mesurées en aimant — 0,5 gr	Forces mesurées dans l'essai du point N° 3	Forces aimant Forces N° 3	Φ'_{r2} Max- wells	Φ'_2 Max- wells	Φ_{r10} Max- wells	Φ_{10} Max- wells	$\left(\frac{\Phi'_{r2}}{\Phi'_2}\right)^2 \times \left(\frac{\Phi_2}{\Phi_{r2}}\right)^2 \times \left(\frac{\Phi_{r10}}{\Phi_{10}}\right)$
0	175,9	176,5	0,996	5370	5960	4310	4310	1
0,02	94,9	89,8	1,056	5295	5740	4215	4205	1,057
0,03	81,95	77,35	1,06	5275	5660	4185	4170	1,08
0,05	68,6	63,9	1,074	5230	5550	4125	4100	1,109
0,10	52,65	45,85	1,147	5145	5310	4010	3975	1,180
0,15	43,32	35,25	1,230	5075	5130	3915	3870	1,236
0,20	37,4	28,67	1,305	5015	4985	3825	3770	1,289
0,25	32,9	24,58	1,34	4955	4855	3740	3680	1,326
0,30	29,2	21,14	1,381	4905	4750	3675	3605	1,371
0,40	24,58	16,77	1,465	4835	4590	3560	3480	1,437
0,50	20,86	14,03	1,489	4770	4450	3460	3370	1,495

Nous n'avons commencé la comparaison qu'à partir de 0^{mm},02, parce que pour les entrefers plus petits il y a à craindre l'influence d'un déplacement de 0. Pour faire cette comparaison, il nous faut faire pour chaque entrefer le rapport des carrés des flux utiles correspondants (1); pour déterminer ces flux dans les deux cas, nous avons à notre disposition les caractéristiques du flux utile à flux total constant BB' et BB' (fig. 56) dont l'une, BB' pour l'aimant, reste à déterminer et les caractéristiques totales principales, pour $x = 0$, AC et A₁C₁, cette dernière pour l'aimant restant également à déterminer.

Nous avons effectué complètement sur la figure pour l'entrefer 0^{mm},50 les constructions à faire dans ce but; nous sommes dans le cas le plus général du problème signalé au paragraphe 17, cas où les origines virtuelles et les coefficients d'Hopkinson sont différents.

En premier lieu, partant des résultats de l'étude du point n° 3 : détermination de la caractéristique de l'entrefer seul OE en portant GF = B'H, puis, inversement, détermination de la caractéristique totale OA' pour le fonctionnement en aimant, en recherchant l'ordonnée où l'on a

$$B'_1 H_1 = G_1 F_1.$$

On a ainsi, en reportant cette caractéristique vers la gauche, le flux total *actuel* $M_1 m_1 = \Phi'_{r2}$ dans la marche en aimant, alors que l'intersection du symétrique de OA' avec AC donne $Mm = \Phi'_2$ pour l'électro-aimant.

Pour comparer les attractions F_A et F_E, nous allons commencer par les comparer en supposant que les coefficients d'Hopkinson actuels sont dans

(1) Nous faisons évidemment une certaine hypothèse en admettant que dans l'aimant, les formules 7') et 10') appliquées à l'entrefer seul, que nous savons être vraies pour l'électro-aimant, le sont encore; l'identité pour l'entrefer zéro est là pour nous rassurer.

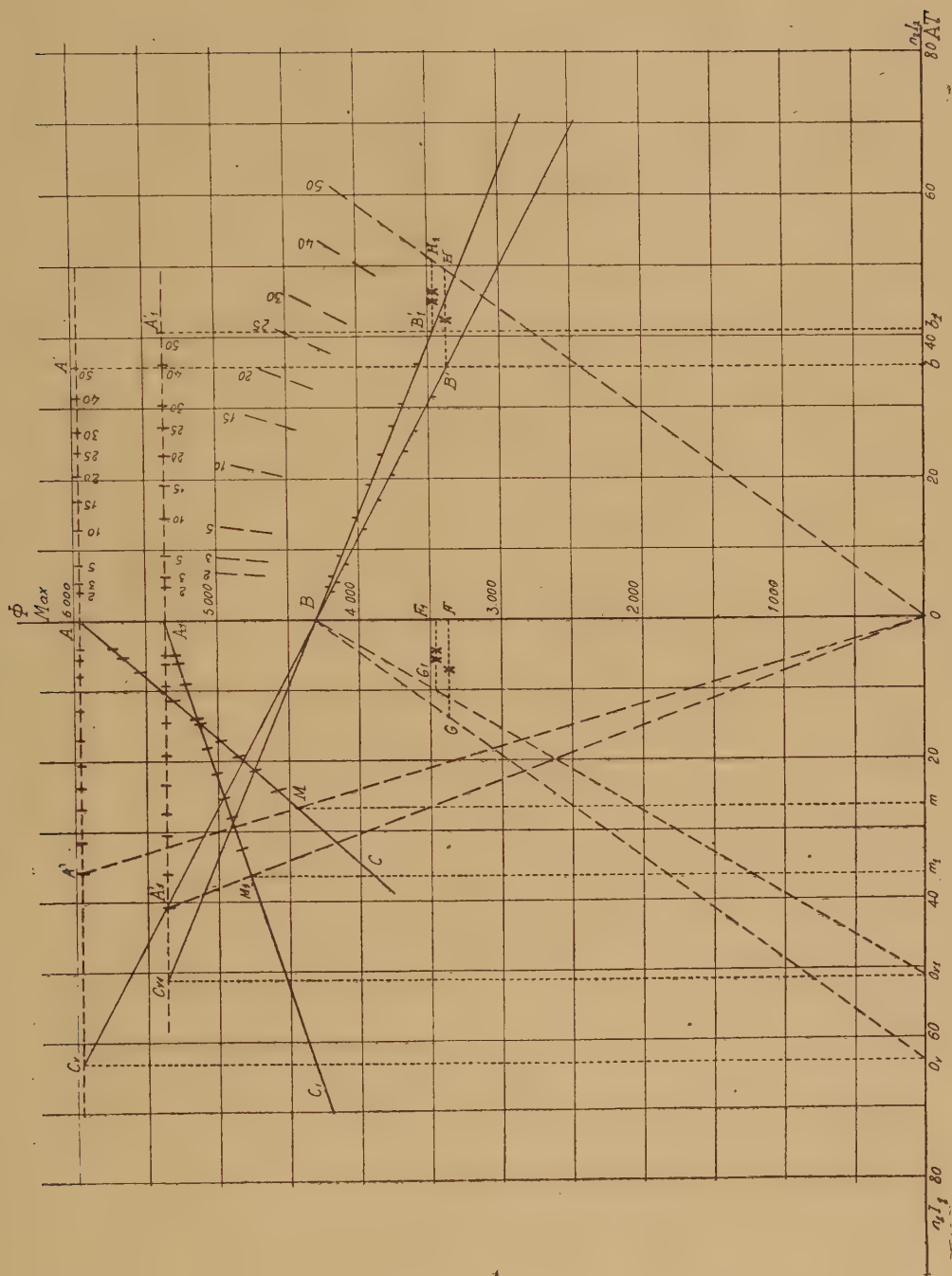


Fig. 56.

le même rapport que pour l'entrefer zéro. Dans ce cas l'on a :

$$\frac{F_A}{F_E} = \left(\frac{\Phi'_{r2}}{\Phi'_2} \right)^2 \left(\frac{\Phi_2}{\Phi_{r2}} \right)^2.$$

Cette opération consiste à ramener les flux totaux, dans les deux systèmes, pour un entrefer x , à être respectivement égaux à ceux pour l'entrefer zéro, c'est-à-dire à ramener ces deux systèmes au même flux utile en admettant qu'ils suivent la même caractéristique des flux utiles à flux total constant.

En réalité ces deux forces vont encore différer pour l'entrefer x de la quantité $\left(\frac{B'_1 b_1}{B'b} \right)^2 = \left(\frac{\Phi_{r10}}{\Phi_{10}} \right)^2$, de sorte que l'on a finalement :

$$\frac{F_A}{F_E} = \left(\frac{\Phi'_{r2}}{\Phi'_2} \right)^2 \left(\frac{\Phi_2}{\Phi_{r2}} \right)^2 \left(\frac{\Phi_{r10}}{\Phi_{10}} \right)^2.$$

Il existe une infinité de systèmes de caractéristique $A_1 C_1$ et de droite BB tels que ces rapports prédéterminés pour les divers entrefers soient égaux à ceux des forces mesurées figurant au tableau (4^e colonne), mais il n'y en a qu'un correspondant à une zone inactive de $\frac{84}{100}$ c'est-à-dire à une

zone active $A_1 C_{V_1}$ de $\frac{16}{100}$, évaluée en supposant la caractéristique $A_1 C_1$ rectiligne jusqu'à sa rencontre avec l'axe des abscisses. Nous l'avons déterminé par tâtonnement. Il correspond à une excitation hystérétique de 318 AT. Cette excitation est bien supérieure au nombre d'ampères-tours hystérétiques, mesuré dans le cycle de la figure 54, relevé en partant d'une excitation initiale $n_1 I_1$ légèrement plus grande. Faut-il donc admettre que la stabilisation, tout en diminuant le flux rémanent, diminue l'inclinaison de la caractéristique du fer, à tel point qu'il y a en somme une augmentation des ampères-tours hystérétiques ? Nous ne faisons que poser cette question qui mériterait, pour être résolue, une étude très longue. Elle est certainement la cause qui fait encore dire que l'aimant est un système caractérisé par une valeur constante du flux total. La détermination de l'origine virtuelle par la deuxième méthode et cette comparaison des pesées en sont le démenti le plus formel.

Cette étude montre que l'on rencontre dans le fonctionnement en aimant tous les éléments de celui en électro-aimant ayant subi simplement une variation dans leurs valeurs numériques ou leur emplacement. Ainsi donc, à part ces quelques modifications, l'aimant se comporte absolument comme un électro-aimant possédant une excitation constante.

CONCLUSIONS

L'examen des résultats des deux derniers chapitres montre que les formules équivalentes de l'attraction des électro-aimants

$$F = 2\pi(nl)_{\text{eff.}}^2 \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial x} \quad 7')$$

$$F = \frac{\Phi_u^2}{8\pi} \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x} \quad 10') \quad (1)$$

appliquées à l'entrefer seul, sont exactes à partir d'une valeur très faible de l'entrefer qui, pour notre appareil d'étude, est de l'ordre de deux fois $0^{\text{mm}},01$ à $0^{\text{mm}},02$ pour toute l'étendue des inductions que nous avons étudiées. L'hypothèse due à M. Pérot, nécessaire à l'établissement de ces expressions, est donc vérifiée à partir de cette valeur alors même que les dérivées $\frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial x}$ et $\frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x}$ relatives à l'entrefer seul varient avec l'induction encore un peu au delà.

Pour le « collage » et les entrefers inférieurs à $0^{\text{mm}},01$ nous ne pouvons nous prononcer. Les différences observées sont dues uniquement, comme l'a montré Threlfall, aux imperfections de l'arrachement et du dressage des surfaces en contact qui font varier très rapidement l'induction en chaque point; nous avons dit, en effet, que lorsque ces imperfections n'existaient pas, la formule de Maxwell avait été vérifiée exactement. Il semble que pour les derniers « points » étudiés, les formules donnent des résultats inférieurs à la réalité, mais que les différences tendent à diminuer avec la saturation. L'hypothèse de Pérot ne serait donc plus suffisante dans ce cas pour intégrer les formules 6) et 9) qui doivent rester les seules exactes dans tous les cas.

Il résulte du mode opératoire suivi que les formules 7') et 10'), dès qu'elles sont applicables, sont indépendantes de la forme et de la nature du reste du circuit magnétique, de la complexité de ses fuites, des caractéristiques suivies par le fer et de l'hystérésis que ce dernier présente. Elles sont encore valables pour l'aimant.

La formule 10') due à M. Lehmann, d'un emploi plus commode que l'autre par sa forme plus générale, est la formule devant servir de base au calcul de l'attraction des électro-aimants.

(1) Nous renvoyons au texte pour la signification des notations.

Nous avons déduit ces résultats de la vérification des formules :

$$F = 2\pi(nl)^2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right)_A \quad 7)$$

et

$$F = \frac{\Phi_z^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \right)_A \quad 10)$$

étendues à la totalité du circuit magnétique, y compris les fuites. Ces formules, *seules* accessibles aux mesures directes, sont équivalentes aux premières lorsque la *perméabilité instantanée* que nous avons définie par $\frac{d\mathcal{B}}{d\mathcal{H}}$ est la même en tous les points du fer ; c'est-à-dire quand il est permis de supposer les fuites concentrées entre deux points d'application. Dans le cas où cette perméabilité est variable cette simplification n'est plus possible et la correction que nous avons établie (voir remarque 2 du § 19 et § 31) pour en tenir compte, se trouve vérifiée par les résultats du point n° 5.

En dehors de cette stricte vérification des formules de l'attraction, le phénomène le plus important que nous ayons mis en évidence est que, dans la déformation à flux total constant du circuit magnétique nécessaire pour l'application des formules 7) et 10), les fuites ne se modifient pas sur toute l'étendue de l'électro-aimant ; il y a une région *inactive* où la distribution des flux reste sensiblement la même. En d'autres termes, dans cette déformation, la caractéristique du flux de fuites est une droite ne passant pas par l'origine et qui coupe l'axe des abscisses, en un point plus rapproché, auquel nous avons donné le nom d'*origine virtuelle*.

Dans la plupart des considérations théoriques sur l'électro-aimant, il est nécessaire de rapporter le système des caractéristiques à l'origine virtuelle, c'est-à-dire à substituer par la pensée une région de perméabilité infinie à la région inactive.

Pratiquement, la connaissance de l'origine virtuelle est indispensable pour pouvoir faire la comparaison de deux états quelconques d'un même électro-aimant. Cette comparaison doit se faire, en effet, en ramenant d'abord le système, dans les deux cas, à des flux totaux correspondant au même flux utile pour l'entrefer origine, puis en faisant, à partir de ce moment, des déformations à flux total constant. C'est ainsi que l'on pourra prédéterminer, en s'aidant des constructions que nous avons établies, la loi de l'attraction à excitation constante d'un électro-aimant en fonction de la course, connaissant la caractéristique totale principale pour l'entrefer nul et l'expression de la perméance ou de la réluctance de l'entrefer seul. Réciproquement il sera possible de rechercher les valeurs de ces quantités et de leurs dérivées, connaissant expérimentalement la loi d'attraction et la caractéristique du flux total à excitation constante. Nous croyons que c'est surtout sous ce dernier aspect qu'il faut considérer l'utilité de notre travail ; car il permettra, en premier lieu, aux constructeurs de faire une étude *exacte* des « entrefers » et de leurs variations, chose qu'il est encore

impossible de prédéterminer exactement, étant donnée la complexité du problème.

Nous avons donné les preuves qui semblent justifier notre explication de l'hystérésis, par l'existence sur le circuit magnétique d'une excitation fictive, hypothèse qui est voisine, en somme, de celle des courants particuliers d'Ampère. La preuve la plus probante est le déplacement de l'origine virtuelle de façon à conserver la même région inactive lorsque les caractéristiques suivies passent ou ne passent pas par l'origine. Il n'y a aucune preuve à tirer de l'application des formules de l'attraction 6) et 7) dans le cas de l'hystérésis, étant donnée la *relativité* de l'origine et l'invariance des formules.

Enfin, nous avons montré comme une chose certaine que dans l'aimant on retrouve les *mêmes* éléments de fonctionnement que dans l'électro-aimant et que *l'aimant*, attirant son armature, fonctionne comme un *électro-aimant à excitation constante*. Il reste cependant quelques obscurités quant à la valeur et à l'emplacement de cette excitation fictive.

Nous tenons à remercier, tout spécialement ici, M. P. Janet, membre de l'Institut, directeur de l'Ecole Supérieure d'Electricité, pour le bienveillant intérêt qu'il a toujours porté à nos recherches et M. Liénard, sous-directeur de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines pour l'aide et les conseils qu'il nous a donnés. Nous remercions aussi nos Collègues de l'Ecole qui nous ont rendu service en mainte occasion et les élèves, Ingénieurs des Arts et Métiers des promotions 1922-23, qui ont travaillé à la construction de notre appareil d'études.

Enfin nous adressons tous nos remerciements à la Compagnie des Compteurs et à la maison J. Carpentier pour les appareils qu'elles ont offerts à l'Ecole à l'occasion de nos travaux et qui nous ont donné entièrement satisfaction.

TABLE DES MATIERES

Introduction	I
--------------------	---

CHAPITRE I. — *Rappel de quelques notions sur le circuit magnétique.*

1. Notion de circuit magnétique	1
2. Analogie du circuit magnétique et du circuit électrique à trois dimensions	3
3. Entrefer	4
4. Circuits magnétiques parfaits et imparfaits	4
5. Coefficient de fuites	5
6. Flux de fuites	5
7. Caractéristiques	6
8. Représentation de la perméance et la réluctance	7
9. Caractéristique résultante de plusieurs parties de circuits magnétiques groupées en série ou en parallèle	7
10. Hystérésis	8
11. Loi d'établissement du courant dans une bobine à noyau de fer soumise à une tension constante	11
12. Energie emmagasinée dans un circuit magnétique	12

CHAPITRE II. — *Etude du circuit magnétique déformable.*

13. Calcul de l'attraction d'un électro-aimant	21
14. Formes diverses données à la formule 1)	15
15. Formules en fonction du courant d'excitation	21
16. Introduction de l'hystérésis dans les formules en fonction du courant d'excitation	25
17. Application pratique des formules en fonction du courant d'excitation	28
18. Formules en fonction du flux	30
19. Application des formules de l'attraction dans le cas d'un circuit magnétique présentant des fuites	34
20. Unités.	43
21. Rendement théorique d'un électro-aimant	43

CHAPITRE III. — *Appareil d'étude et méthodes de mesures.*

22. Exposé historique des expériences faites en vue de rechercher les lois de l'attraction de l'électro-aimant	47
23. But et objet de nos recherches	51
24. Choix et description de notre appareil	51

25. Montage des circuits d'excitation et mesure des ampères-tours	56
26. Mesure des flux	59
27. Mesure des entrefers	63
28. Mesures des attractions	66

CHAPITRE IV. — *Exposé des résultats relatifs à la vérification des formules de l'attraction des électro-aimants.*

29. Vérification des formules de l'attraction de l'électro-aimant. Mode opératoire	70
30. Vérification des formules de l'attraction de l'électro-aimant. Exposé des résultats	76
31. Caractéristique du flux utile à flux total constant. Notion d'origine virtuelle	93

CHAPITRE V. — *Etude particulière de l'hystérésis et du fonctionnement en aimant.*

32. Comparaison des cycles d'hystérésis pour deux valeurs de l'entrefer en partant du même flux total	101
33. Etude des attractions dans le fonctionnement en aimant	104
Conclusions	III

DEUXIEME THESE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

**Recherches récentes sur la Vapeur d'eau à haute pression
et à haute température.**

Vu et approuvé :

Paris, le 30 décembre 1925.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

M. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

P. LAPIE.

